APPUNTI PRE-CORSI MACROAREA INGEGNERIA
RICHIAMI DI MATEMATICA E GEOMETRIA

Macroarea di Ingegneria,
Università di Roma, Tor Vergata

Settembre 2018

Premessa

Benvenuti nella macroarea di Ingegneria. Queste dispense riguardano alcuni richiami di matematica e geometria che potrebbero esservi utili per affrontare i corsi del primo semestre, in particolare Analisi I e Geometria I. Gli argomenti trattati in queste dispense coprono alcune delle lezioni dei pre-corsi di Ingegneria erogati dalla macroarea, pre-corsi che hanno luogo prima dell'inizio ufficiale delle lezioni.

Il gergo di queste dispense è intermedio tra la formulazione rigorosa propria degli insegnamenti universitari e il linguaggio usato nelle scuole secondarie. Questa scelta, in alcune sezioni, porta necessariamente a un testo non organico in cui sono presenti digressioni che hanno l'obiettivo di darvi un quadro più ampio degli argomenti trattati e, ove possibile, di accennare un collegamento con argomenti che saranno oggetto dei corsi di Analisi e Geometria. Abbiamo evidenziato nel testo queste digressioni che, a una prima lettura, possono essere saltate.

Quella che state leggendo è la prima versione del documento e, quindi, sicuramente conterrà errori di battitura o passaggi poco chiari. Vi saremmo grati se ci segnalaste errori (o ci deste suggerimenti) in modo da migliorare il testo per i vostri colleghi dei prossimi anni.

Contatto: mauro.chinappi@uniroma2.it

Ringraziamenti

Queste dispense sono il frutto del programma dei precorsi sviluppato in collaborazione col Dr. Lorenzo D'orazio e la Prof. Mariolina Richetta. Hanno contribuito al miglioramento della bozza molti studenti-tutor, tra cui, Iacopo Fara, Mirko Montoni, Clara Nuzzolese e Alessia Sisti.

Contents

Chapter 1

Polinomi

In questo capitolo verranno brevemente introdotti i polinomi di una sola variabile reale e le principali regole di scomposizione. Esempio rilevanti di equazioni e disequazioni che coinvolgono polinomi saranno trattati nei paragrafi finali.

1.1 Definizione di polinomio e nomenclatura

Un polinomio è una qualunque espressione composta da variabili a cui sono applicate solamente le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e potenza con esponente intero, ad esempio, sono polinomi le espressioni

$$x^2 + 3y - 5z^4 \tag{1.1}$$

$$xy^2 - 1 \tag{1.2}$$

$$x^2 - 5x + 6 - 2x^2 \ . \tag{1.3}$$

Nella maggior parte dei casi, i polinomi sono rappresentati nella loro **forma normale**, cioè vengono semplificati e accorpati i termini in cui una variabile compare con lo stesso esponente. Ad esempio, nella (1.3), compaiono due termini in cui la variabile x è elevata al quadrato. Accorpando i due termini, si ottiene la seguente forma normale

$$-x^2 - 5x + 6 \ . \tag{1.4}$$

Viene chiamato **grado** del polinomio l'esponente più alto che appare a valle della riduzione in forma normale. Ad esempio, la (1.2) ha grado 4, la (1.3) ha grado 3 (nel caso di più variabili si sommano i gradi delle variabili che compaiono all'interno dello stesso monomio) mentre la (1.3) ha grado 2.

1.2 Polinomi di una sola variabile

Un polinomio di grado n di una sola variabile x, a valle della riduzione in forma normale può essere scritto come

$$a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ , \tag{1.5}$$

dove $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sono $n+1$ coefficienti numerici. In questo capitolo ci limiteremo a polinomi di variabile reale a coefficienti reali.

Le **radici del polinomio** sono i valori della variabile x per cui il polinomio ha valore nullo. Ad esempio il valore $x = 1$ è un radice del polinomio (1.4). Una domanda ricorrente nell'ambito dei polinomi è determinare tutte le radici di un dato polinomio e non solamente una sua radice particolare. Il problema equivale a trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ . \tag{1.6}$$

È possibile dimostrare che un polinomio di grado n di variabile reale a coefficienti reali ha, al massimo, n radici. Si noti come un polinomio può anche non avere nessuna radice reale, indipendentemente dal suo grado, ad esempio, il polinomio

$$3x^6 + 1 \tag{1.7}$$

non ha radici in quanto l'equazione

$$3x^6 + 1 = 0 \tag{1.8}$$

non ha alcune soluzione. Difatti, il primo termine della (1.8) è una potenza pari e, quindi, è un numero positivo. Anche il secondo termine (+1) è un numero positivo. La somma di due numeri positivi non può dare zero e, quindi, non esiste alcune x per cui la (1.8) ha soluzione.

> **Nota:** Nel campo dei numeri complessi, è possibile dimostrare che ogni polinomio di grado n ha esattamente n soluzioni complesse (contate con le relative molteplicità). Tale importante risultato è una conseguenza del *teorema fondamentale dell'algebra* la cui trattazione esula dagli obiettivi del presente testo.

Nell'ipotesi che il polinomio abbia n radici reali distinte, indicate le radici come $x_1, x_2, \ldots, x_n$, possiamo scrivere il polinomio come

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \ . \tag{1.9}$$

Dalla scrittura (1.9) è evidente che le radici sono proprio $x_1, \ldots, x_n$ in quanto sostituendo ognuno dei valori $x_1, \ldots, x_n$ nel polinomio, si ottiene zero[1].

[1] In una moltiplicazione è sufficiente che uno dei fattori sia nullo affinchè il prodotto sia nullo.

1.3 Equazioni di primo e secondo grado

La ricerca delle radici per polinomi di primo è banale. Difatti, data l'equazione polinomio nella forma ridotta

$$a_1 x + a_0 \ , \tag{1.10}$$

l'equazione

$$a_1 x + a_0 = 0 \ , \tag{1.11}$$

ha soluzione

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \ . \tag{1.12}$$

Nel caso dei polinomi di secondo grado, invece, la risoluzione è leggermente più articolata. Consideriamo il polinomio

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ , \tag{1.13}$$

e, in conformità con la notazione tipicamente adottata, riscriviamo l'equazione ad esso associata come

$$ax^2 + bx + c = 0 \ . \tag{1.14}$$

Le soluzioni x_1 e x_2 della (1.14) possono essere espresse come

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.15}$$

Si noti come, nell'ambito dei numeri reali, le (1.15) hanno senso solo se l'argomento della radice quadrata è maggiore o uguale a zero, cioè se $b^2 - 4ac \geq 0$. In pratica,

- se $b^2 - 4ac \geq 0$, ambedue le soluzioni esistono ed hanno valori distinti
- se $b^2 - 4ac = 0$, ambedue le (1.15)danno lo stesso valore $x_1 = x_2 = -b/2a$
- se $b^2 - 4ac < 0$, non esiste alcuna soluzione reale.

In molti testi, l'argomento della radice viene indicato come discriminante e viene usato il simbolo $\Delta = b^2 - 4ac$.

1.4 Equazioni di grado superiore

Per equazioni di grado maggiore di due non esistono formule risolutive di facile impiego. Per affrontare questi problemi, quindi, si deve ricorrere a strategie che li riducano, in qualche modo, a equazioni di primo e secondo grado. In questa sezione, mostriamo due possibili metodi.

1.4.1 Metodo per sostituzione

Consideriamo l'equazione di quarto grado

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ , \tag{1.16}$$

che, in alcuni testi, è indicata come biquadratica. Possiamo porre $x^2 = y$ ottenendo

$$ay^2 + b^y + c = 0 \tag{1.17}$$

che è un'equazione di secondo grado nella variabile y che possiamo risolvere come descritto nella sezione precedete. Se le soluzioni y_1 ed y_2 non esistono ($\Delta < 0$) allora la (1.16) non ha soluzioni. Se invece la y_1 e la y_2 esistono, vanno risolte le due equazioni

$$x^2 = y_1 \quad , \quad x^2 = y_2. \tag{1.18}$$

Si noti che, a loro volta, le (1.18) possono avere o no soluzioni. In particolare, se y_1 e y_2 sono ambedue positive, ambedue le (1.18) hanno soluzioni e, quindi, la (1.16) ha quattro soluzioni reali data da

$$x_1 = \sqrt{y_1} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{y_1} \quad , \quad x_3 = \sqrt{y_2} \quad , \quad x_4 = -\sqrt{y_2}\ . \tag{1.19}$$

Se invece almeno una delle due soluzioni y_1,y_2 è negativa, le espressioni $\sqrt{y_1}$ (e/o $\sqrt{y_2}$) perdono senso. In tal caso, la (1.16) non ammette nessuna soluzione (se sia y_1 che y_2 sono negative) o due soluzioni (se solo una tra y_1 ed y_2 è negativa).

1.4.2 Scomposizione di un polinomio

La seconda modalità per la soluzione di un'equazione polinomiale di terzo grado (o superiore) è quella di scomporre il polinomio come prodotto di polinomi di primo e secondo grado. A tal fine, risulta utile introdurre un procedimento per dividere i polinomi. Consideriamo due polinomi $P(x)$ e $D(x)$ con $P(x)$ di grado maggiore di $D(x)$, è sempre possibile scrivere il polinomio $P(x)$ come

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)\ , \tag{1.20}$$

con $Q(x)$ e $R(x)$ due polinomi detti quoziente e resto. Illustriamo il procedimento per

$$P(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3 \quad , \quad D(x) = x^2 - x + 1\ . \tag{1.21}$$

In primo luogo, scriviamo i due polinomi in una tabella analoga a quella usata per le divisioni avendo cura di ordinare i singoli monomi a partire dal grado più alto

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + \ \ x + 3 & x^2 - \ \ x + 1 \\ \cline{2-2} & \\ \end{array} \ .$$

Dividiamo poi i monomio di grado maggiore di $P(x)$ per il monomio di grado maggiore di $D(x)$ e riportiamo il risultato nella colonna di destra. Nel caso in esame, abbiamo $6x^3/x^2 = 6x$, e, quindi, la tabella diventa

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + \ x + 3 & x^2 - \ x + 1 \\ \cline{2-2} & \qquad 6x \end{array} \quad .$$

A questo punto, moltiplichiamo $6x$ per $D(x)$ e mettiamo il risultato nella colonna di destra

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + \ x + 3 & x^2 - \ x + 1 \\ \cline{2-2} 6x^3 - 6x^2 + 6x \quad & \qquad 6x \end{array} \quad ,$$

sottraiamo il polinomio ottenuto a $P(x)$ e scriviamo il risultato nella colonna di destra

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + \ x + 3 & x^2 - \ x + 1 \\ \cline{2-2} 6x^3 - 6x^2 + 6x \quad & \qquad 6x \\ \hline 4x^2 - 5x + 3 & \end{array} \quad .$$

Si noti che il polinomio risultante, $4x^2 - 5x + 3$, è di grado inferiore rispetto a $P(x)$. A questo punto, applichiamo lo stesso procedimento al polinomio $4x^2 - 5x + 3$, dividiamo cioè il suo monomio di grado più alto per il monomio di grato più alto di $D(x)$, ottenendo

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + \ x + 3 & x^2 - \ x + 1 \\ \cline{2-2} 6x^3 - 6x^2 + 6x \quad & \qquad 6x + 4 \\ \hline 4x^2 - 5x + 3 & \\ 4x^2 - 4x + 4 & \\ \hline -x - 1 & \end{array} \quad .$$

Il polinomio ottenuto a destra, $-x - 1$, è di grado inferiore a $D(x)$. Il procedimento non può quindi essere ripetuto. Il polinomio a sinistra è il quoziente $Q(x)$ mentre quello a destra è il resto $R(x)$. Dalla (1.20) risulta quindi

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (6x + 4)(x^2 - x + 1) - x - 1 \ . \tag{1.22}$$

Alcune note:

- Il risultato finale del procedimento può essere facilmente verificato. Difatti, è sufficiente sviluppare la (1.22)
- In generale, se $D(x)$ è un polinomio di primo grado $x - a$ con a una delle radici del polinomio, il resto $R(x)$ deve essere necessariamente zero.

Questa seconda osservazione è cruciale nella risoluzione delle equazioni di terzo grado o superiore. Difatti, se abbiamo una equazione di terzo grado e conosciamo una soluzione x_1, possiamo dividere il polinomio per $(x-x_1)$ ottenendo un polinomio di secondo grado. A questo punto possiamo ricavare la soluzione del polinomio di secondo grado usando le (1.15). Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0 \ . \tag{1.23}$$

L'equazione ammette come soluzione $x_1 = -1$, per provarlo è sufficiente sostituire $x_1 = 1$ nella (1.23). A questo punto possiamo applicare il procedimento sopra indicato ponendo

$$P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 6 \quad , \quad D(x) = x - 1 \ , \tag{1.24}$$

ottenendo

$$Q(x) = x^2 + 5x - 6 \quad , \quad R(x) = 0 \ . \tag{1.25}$$

La (1.23) può essere quindi scritta come

$$(x + 1)(x^2 + 5x - 6) = 0 \ . \tag{1.26}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \tag{1.27}$$

si ottengono le ulteriori due soluzioni

$$x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = 6 \ . \tag{1.28}$$

Nota: Un'altra nota strategia per scomporre polinomi si basa sulla regola di Ruffini. Tale strategia è sostanzialmente equivalente a una divisione per polinomi a resto zero. Lo studente che abbia familiarità con la regola di Ruffini può usarla per la scomposizione dei polinomi di grado maggiore di tre, tuttavia, suggeriamo anche di apprendere il metodo della divisione tra polinomi in quanto applicabile anche ad altri contesti.

1.5 Disequazioni polinomiali

Risolvere un'equazione vuol dire trovare tutti i valori della x per cui i due membri a destra e sinistra dell'uguale danno lo stesso valore. In molte situazioni, è risulta utile porsi una domande leggermente diversa. Ad esempio, date due espressioni

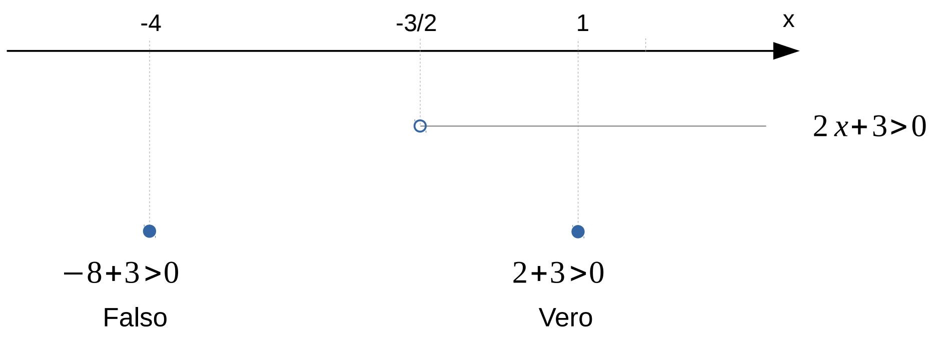

Figure 1.1: Rappresentazione grafica della soluzione della disequazione $2x + 3 > 0$, eq. (1.33). I due valori $x_0 = -4$ e $x_0 = -1$ sono usati per la verifica.

$f(x)$ e $g(x)$ potremmo essere interessati a trovare i valori della x per cui $f(x)$ è maggiore di $g(x)$. In formule, questa relazione viene scritta come

$$f(x) > g(x) \tag{1.29}$$

è chiamata disequazione. Se invece di essere interessati ai valori della x per cui $f(x)$ è maggiore di $g(x)$, fossimo interessati a quelli per cui è minore, scriveremo, invece, $f(x) < g(x)$. In alcuni casi vogliamo includere anche i valori per cui le due funzioni sono uguali oltre e useremo i simboli $\leq$ e $\geq$.

Nelle prossime sezioni mostreremo alcuni metodi per risolvere le equazioni in cui $f(x)$ e $g(x)$ sono polinomi. Il primo passo da fare, è portarsi sempre nella forma ridotta, cioè sviluppare eventuali prodotti, portare tutto a primo membro e arrivare nella forma generica

$$P(x) > 0 \,, \tag{1.30}$$

o, alternativamente, nella forma $P(x) < 0$.

1.5.1 Disequazioni di primo grado

Iniziamo dal caso più semplice, cioè immaginiamo di dover determinare gli intervalli della x per cui

$$a_1 x + a_0 > 0 \,. \tag{1.31}$$

In analogia con quanto fatto con le equazioni di primo grado, potremmo pensare di a_0 al secondo membro e dividere per a_1, ottenendo

$$x > -\frac{a_0}{a_1} \,. \tag{1.32}$$

Questo procedimento, tuttavia, richiede attenzione. Difatti, se a_1 è positivo, il procedimento è lecito, invece, se $a_1 < 0$, va cambiato verso della disequazione. In generale, difatti, se moltiplichiamo per un numero negativo tutti i membri di una disequazione, va cambiato il segno.

Facciamo un esempio numerico per chiarire questo concetto. Consideriamo la disequazione

$$2x + 3 > 0 \ , \tag{1.33}$$

Adottando il procedimento appena presentato, il risultato è

$$x > -\frac{3}{2} \ . \tag{1.34}$$

Risulta molto utile rappresentare graficamente questo risultato sull'asse reale. Per farlo si procede come in figura 1.1. In primo luogo mettiamo sull'asse reale il valore $-3/2$. Questo valore divide l'asse reale in due regioni, $x > -3/2$ e $x < 3/2$. In una di essere la disequazione è verificata, indichiamo questa regione con una linea continua, nell'altra no. Una volta rappresentata la soluzione sull'asse reale, possiamo facilmente verificare che la soluzione proposta è corretta sostituendo, per ambedue gli intervalli un valore di prova della x e calcolando il valore delle espressioni che compaiono nella (1.29). Ad esempio, per l'intervallo $x > -3/2$, possiamo scegliere come valore di prova $x_0 = 1$, ottenendo $2 + 3 > 0$ che è un'espressione vera. Invece, per l'intervallo $x < -3/2$ possiamo scegliere $x_0 = -4$, ottenendo $-8 + 3 > 0$ che è un'espressione falsa.

Questo procedimento di verifica, che nel caso specifico può sembrare superfluo, risulta molto utile per verificare eventuali errori di segno nel procedimento. Ad esempio, consideriamo la disequazione

$$-2x - 3 > 0 \ . \tag{1.35}$$

Nel suo svolgimento, potremmo dimenticarci che, quando dividiamo ambo i membri per -2, va cambiato verso alla disequazione. Un errore del genere ci porterebbe alla di nuovo alla

$$x > -\frac{3}{2} \ . \tag{1.36}$$

Ripetendo il procedimento grafico, troveremo gli stessi intervalli rappresentai in figura 1.1. A questo punto potremmo effettuare la verifica scegliendo come punto di prova per l'intervallo $x > -3/2$ il valore $x_0 = 0$, ottenendo quindi $-3 > 0$ che è falso, mentre il nostro grafico ci dice che in quell'intervallo la disequazione deve essere verificata.

> **Nota:** Nel caso in cui le disequazioni includano anche il valore per cui le due espressioni sono uguali (simbolo $\leq$ e $\geq$), nelle soluzioni dobbiamo anche includere le soluzioni dell'equazione associata. Nel caso specifico della (1.33), avremmo, quindi, che l'equazione è verificata per $x \geq -3/2$.

Nota: La soluzione della disequazione spesso viene indicata riportando esplicitamente gli intervalli, ad esempio $x > -3/2$ può essere scritto come

$$x \in (-3/2, +\infty) \; . \tag{1.37}$$

Se l'estremo dell'intervallo è incluso nella soluzione, si usa una parentesi quadra $x \in [-3/2, +\infty)$.

1.5.2 Disequazioni di secondo grado

Trattiamo adesso le disequazioni di secondo grado, che, scrivendo il polinomio in forma ridotta, possono sempre essere scritte come

$$ax^2 + bx + c > 0 \; . \tag{1.38}$$

Difatti, eventuali disequazioni nella forma $ax^2 + bx + c < 0$ possono sempre essere ridotte alla (1.38) moltiplicando ambo i membri per -1 e cambiando verso alla disequazione [2].

Il primo passo è la risoluzione della equazione associata che, come visto nelle sezioni precedenti, può avere 0,1 o 2 soluzioni. Sui testi delle scuole secondarie, spesso viene riportata una tabella che, in funzione del numero di soluzioni, del segno di a e del verso della disequazione ($>$ o $<$) indica quali sono gli intervalli in cui la (1.38) è verificata. In queste dispense, riporteremo un altro procedimento che ha il pregio di essere generalizzabile ad altre disequazioni.

- Passaggio 1, risoluzione della equazione associata: sostitutire il segno di $>$ (o $<$) con $=$ e risolvere l'equazione risultate.
- Passaggio 2, definizione degli intervalli: le soluzioni dell'equazione dividono l'asse reale in intervalli. In particolare, se l'equazione ha due soluzioni, e, per esempio $x_1 < x_2$, gli intervalli saranno $x \in (-\infty, x_1)$, $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_2, -\infty)$.
- Passaggio 3, verifica per ogni intervallo: per ognuno degli intervalli determinati, selezionare un punto di prova x_0 (diverso dagli estremi dell'intervallo) e sostituirlo nella disequazione. Se la disequazione è verificata per x_0, allora è verificata per tutto l'intervallo.

Seguendo questo procedimento, risolviamo la disequazione

$$-x^2 + 4x + 21 > 0 \; . \tag{1.39}$$

[2] Si ricordi che quando moltiplichiamo ambo i membri per un numero negativo, va cambiato verso alla disequazione.

Il discriminante $b^2 - 4ac$ è maggiore di zero, quindi, l'equazione associata ha due soluzioni che sono

$$x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = 7\ . \tag{1.40}$$

e che divindono l'asse reale nei tre intervalli

$$x \in (-\infty, -3)\ , \tag{1.41}$$
$$x \in (-3, 7)\ , \tag{1.42}$$
$$x \in (7, -\infty)\ . \tag{1.43}$$

A questo punto possiamo scegliere tre punti di prova, uno per ogni intervallo, ad esempio $x_0 = -10$ per l'intervallo 1.42, $x_0 = 0$ per l'intervallo 1.43 e $x_0 = 10$ per l'intervallo 1.43. che, sostituiti nella (1.39), danno, rispettivamente $-119 > 0$ (falso), $21 > 0$ (vero) e $-39 > 0$ (falso). Quindi, la disequazione è verificata solo nell'intervallo $x \in (-3, 7)$.

> **Nota:** Nel caso l'equazione associata non abbia soluzioni (discriminante minore di zero), l'asse reale è "diviso" in un solo intervallo che coincinde con l'asse stesso, cioè, $x \in (-\infty, +\infty)$. Basta quindi un solo punto di prova. Invece, se la soluzione ammette una sola soluzione x_1, possiamo pensare che l'asse reale è diviso nei due intervalli $x \in (-\infty, x_1)$ e $x \in (x_1, +\infty)$. Andrebbero quindi presi due punti prova, uno per ogni intervallo. In realtà è possibile dimostrare che se la disequazione è verificata in un intervallo è verificata anche nell'altro. Analogamente, che se la disequazione non è verificata in un intervallo non è verificata neanche nell'altro.

1.5.3 Disequazioni di grado superiore

In generale, i tre passaggi indicati nella sezione precedente (risoluzione dell'equazione associata, definizione degli intervalli, verifica per ogni intervallo), valgono anche per disequazioni polinomiali di grado superiore. Nel caso in cui sia possibile scomporre il polinomio come prodotto di più polinomi, esiste un secondo metodo più diretto. Assumiamo quindi che il polinomio possa essere scritto come

$$P(x) = A(x)B(x)\ , \tag{1.44}$$

e che la disequazione da risolvere sia, ad esempio,

$$A(x)B(x) < 0. \tag{1.45}$$

Abbiamo quattro possibili casi

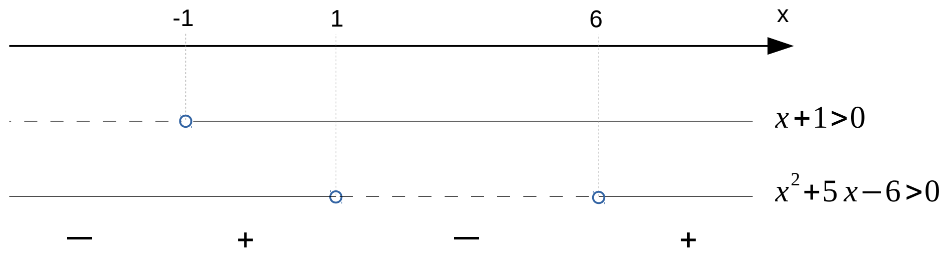

Figure 1.2: Risoluzione disequazione (1.47). Indipendentemente dal verso della disequazione originale ("$>$" o "$<$"), per ognuno dei due fattori, cerchiamo gli intervalli in cui è positivo, risolvendo, separatamente le due disequazioni $x + 1 > 0$ e $x^2 + 5x - 6 > 0$. Nel riportare le soluzioni sul grafico, riportiamo con una linea continua gli intervalli in cui le singole disequazioni sono verificate (e, quindi, il singolo fattore è positivo) e con linea tratteggiata gli intervalli in cui le disequazioni non sono verificate (e, quindi, il singolo fattore è negativo). A questo punto, facciamo il prodotto del segno per ogni singolo intervallo. Abbiamo quindi che per $x \in (-\infty, -1)$ e $x \in (1, 6)$ il prodotto è negativo, mentre per $x \in (-1, 1)$ e $x \in (6, \infty)$ il prodotto è positivo. Dal momento che nella (1.47) cercavamo gli intervalli in cui l'espressione è "< 0", la soluzione della disequazione è $x \in (-\infty, -1) \cup x \in (1, 6)$.

- Se $A(x) > 0$ e $B(x) > 0 \Longrightarrow A(x)B(x) > 0$
- Se $A(x) > 0$ e $B(x) < 0 \Longrightarrow A(x)B(x) < 0$
- Se $A(x) < 0$ e $B(x) > 0 \Longrightarrow A(x)B(x) < 0$
- Se $A(x) < 0$ e $B(x) < 0 \Longrightarrow A(x)B(x) > 0$

Quindi, per determinare il segno di $A(x)B(x)$ possiamo determinare, nei vari intervalli, segni di $A(x)$ e $B(x)$ e poi fare il **prodotto del segno**. In pratica, risolviamo prima separatamente le due disequazioni

$$A(x) > 0 \quad , \quad B(x) > 0 \; . \tag{1.46}$$

Nota: in questo passaggio risolvo sempre $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$ indipendentemente dal verso ("$>$" o "$<$") della 1.45. Poi riportiamo su grafico gli intervalli in cui $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $B(x) > 0$ e $B(x) < 0$ e, infine, per ogni intervallo, calcoliamo il segno di $A(x)B(x)$.

Come esempio, consideriamo la disequazione

$$(x + 1)(x^2 + 5x - 6) < 0 \; , \tag{1.47}$$

la cui equazione associata è la (1.26). Studiamo il segno dei due fattori, cioè risolviamo le due disequazioni

$$x + 1 > 0 \; , \tag{1.48}$$

$$x^2 + 5x - 6 > 0 \; . \tag{1.49}$$

Dal momento che le (1.48) e (1.49) sono disequazioni di primo e secondo grado, sappiamo risolvere. Omettiamo per brevità il procedimento e riportiamo direttamente le soluzioni nel grafico 1.2.

1.6 Esercizi

1. Un polinomio di quarto grado, può avere due radici reali?
2. Una equazione polinomiale di terzo grado, può avere tre soluzioni reali?
3. Un polinomio di quinto grado, può avere sei soluzioni reali?
4. Scrivere la forma ridotta dei polinomi che hanno tutte e solo le seguenti radici

$$x_1 = -1 \tag{1.50}$$

$$x_1 = +1/2 \tag{1.51}$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 7 \tag{1.52}$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -7 \tag{1.53}$$

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -7 \ , \ x_3 = 7 \tag{1.54}$$

$$x_1 = \pi \ , \ x_2 = -\pi/2 \tag{1.55}$$

$$x_1 = 2 \ , \ x_2 = -3 \ , \ x_3 = 5 \ , \ x_4 = -1 \tag{1.56}$$

5. Risolvere la seguenti equazioni

$$x - 5/2 = 0 \tag{1.57}$$

$$3x + \pi = \pi/2 \tag{1.58}$$

$$x^2 + 2 = 3 \tag{1.59}$$

$$x^2 + 2x = 3 \tag{1.60}$$

$$x^2 - 2x = 3 \tag{1.61}$$

$$x^2 - 2x = -3 \tag{1.62}$$

$$2x^2 - x/2 = 0 \tag{1.63}$$

$$2x^2 - x/2 = 4 \tag{1.64}$$

6. Trovare quoziente $Q(x)$ e resto $R(x)$ per la divisione tra polinomi $P(x)/D(x)$ con (suggerimento: effettuare la verifica)

$$P(x) = -4x^3 + 10x^2 - 10x + 3 \quad , \quad D(x) = 2x^2 - 4x + 3 \tag{1.65}$$

$$P(x) = -4x^3 - 10x + 3 \quad , \quad D(x) = 2x^2 - 4x + 3 \tag{1.66}$$

$$P(x) = -5x + x^2 + 6 \quad , \quad D(x) = x - 2 \tag{1.67}$$

$$P(x) = x^3 - 27 \quad , \quad D(x) = x - 3 \tag{1.68}$$

$$P(x) = x^3 - 27 \quad , \quad D(x) = x - 3 \tag{1.69}$$

$$P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 2 \quad , \quad D(x) = 3x + 2 \tag{1.70}$$

7. Risolvere la seguenti disequazioni

$$x - 5/2 < 0 \tag{1.71}$$

$$(x^2 + 2)(x - 1) \leq 0 \tag{1.72}$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} < 0 \tag{1.73}$$

$$\frac{(x + 5)(x^2 - 1)}{x^2 - 3x + 3} > 0 \tag{1.74}$$

$$\frac{(x + 5)}{(x^2 - 4)} > 2 \tag{1.75}$$

$$x^2 + 4 \leq x - 5 \tag{1.76}$$

$$x^3 + 1 \leq 0 \tag{1.77}$$

$$x^3 - 1 \leq 0 \tag{1.78}$$

Chapter 2

Goniometria

In questo capitolo verrà introdotto il concetto di angolo, le principali funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente e cotangente) e le relazioni che intercorrono tra esse. A fine capitolo troverete degli esercizi utili per valutare la vostra comprensione degli argomenti esposti.

2.1 Definizione di Angolo

Consideriamo due semirette nel piano aventi la stessa origine O. Queste semirette dividono il piano in due regioni distinte. Chiameremo **angolo** ciascuna delle due regioni, **vertice** dell'angolo il punto O e **lati** dell'angolo le due semirette. Inoltre chiameremo angolo concavo la regione del piano che contiene i prolungamenti dei due lati (linee tratteggiate in figura 2.1a) e angolo convesso l'altra regione.

Viene indicato come angolo piatto, l'angolo i cui lati sono semirette che giacciono sulla stessa retta ma hanno direzioni opposte. In questo particolare caso, l'angolo concavo e l'angolo convesso hanno la stessa ampiezza, figura 2.1b. L'angolo retto è, invece, la metà di un angolo piatto, figura 2.1c.

2.1.1 Gradi e radianti

Siccome l'angolo è definito come la porzione del piano tra due semirette, sembra naturale che la sua unità di misura sia un'area. Tuttavia, questa misura non ha significato né utilità pratica visto che le regioni del piano definite angoli hanno area infinita. Viene quindi espressa la misura dell'angolo in termini dell'ampiezza della rotazione che porta una delle semirette a sovrapporsi all'altra.

Esistono due tipi di misure comunemente usate: i gradi sessagesimali e i radianti. Nei gradi sessagesimali, la misura di un angolo retto è $90°$, conseguentemente, quella di un angolo piatto è $180°$ e il movimento necessario a far ruotare completamente una semiretta fino a tornare nella posizione originale è $360°$. Questo particolare angolo di $360°$ viene indicato come angolo giro.

La misura dell'angolo in radianti invece si ottiene calcolando il rapporto tra la lunghezza di un arco di circonferenza avente come origine il vertice dell'angolo e come limite i due lati e il raggio della circonferenza stessa. Questo rapporto non dipende dal raggio della circonferenza scelta ma solo dall'angolo, figura 2.1d. In

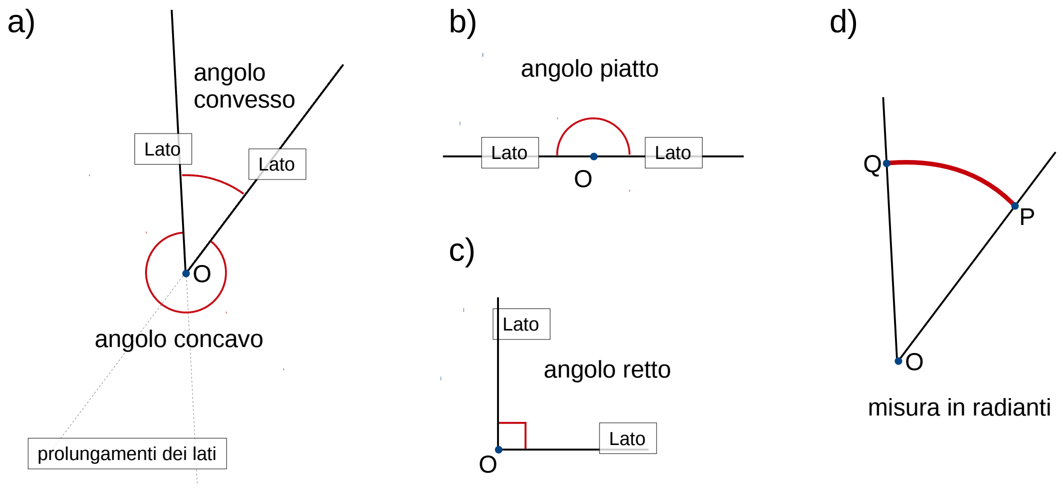

Figure 2.1: Definizione di angolo. a) L'angolo è la regione di piano compresa tra due semirette (lati) che hanno la stessa origine O (vertice). Queste semirette dividono il piano in due regioni distinte, viene indicato come angolo concavo la regione del piano che contiene i prolungamenti dei due lati (linee tratteggiate) e angolo convesso l'altra. Nel caso in cui le due semirette giacciono sulla stessa retta ma hanno direzioni opposte, l'angolo concavo e convesso hanno la stessa ampiezza. Tale angolo viene indicato come angolo piatto (b). L'angolo retto è la metà di un angolo piatto (c). d) La misura dell'angolo in radianti è ottenuta come rapporto dell'arco di circonferenza di centro O che va dai punti P e Q (riportato in rosso) e la lunghezza stessa della circonferenza.

radianti l'angolo giro vale 2π, cioè la lunghezza dell'intera circonferenza $2\pi r$ diviso il raggio r. Conseguentemente, l'angolo piatto corrisponde a π e l'angolo retto a $\pi/2$.

2.2 Circonferenza goniometrica

La circonferenza goniometrica è una circonferenza di raggio unitario che ha come centro l'origine degli assi di un sistema di riferimento cartesiano. Il punto di intersezione tra la circonferenza goniometrica e il semiasse orizzontale positivo è detto origine degli assi, punto A in figura 2.2. La lunghezza dell'arco di circonferenza AP è la misura dell'angolo in radianti. Ad esempio, l'angolo retto corrisponde a un quarto di circonferenza, quindi la lunghezza dell'arco è data dalla lunghezza totale della circonferenza ($l = 2\pi$) diviso 4, cioè $\pi/2$.

Gli angoli sono positivi se il punto P viene raggiunto dal punto A muovendosi in senso antiorario e negativi se raggiunti in muovendosi in senso orario. Ad esempio, il punto P in figura 2.2 corrisponde sia all'angolo α sia all'angolo $-(2\pi - \alpha)$. Difatti la lunghezza dell'arco di circonferenza che va da A a P in senso orario è proprio $(2\pi - \alpha)$.

Il coseno dell'angolo α è la posizione sull'asse x del punto H, proiezione del punto P sull'asse x. Il seno dell'angolo α è la posizione sull'asse y del punto M,

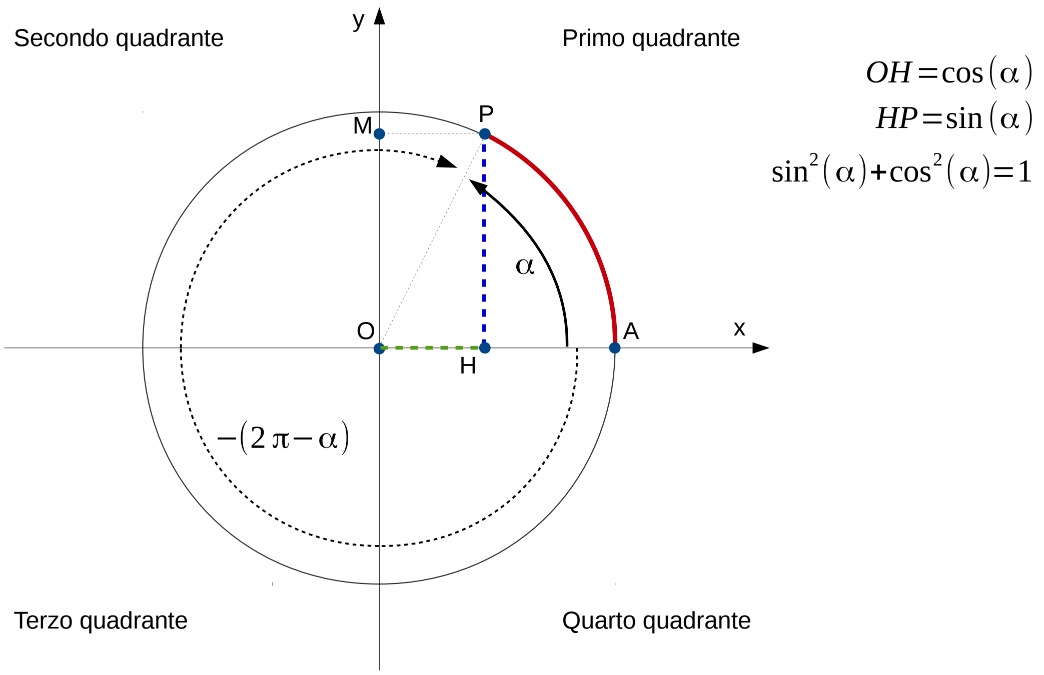

Figure 2.2: Circonferenza goniometrica. Il punto A indica l'origine degli archi. Il punto P ha coordinate $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Gli angoli sono positivi se misurati in senso antiorario a partire dall'origine degli archi A e negativi viceversa. Quindi, il punto P corrisponde sia all'angolo α che all'angolo $-(2\pi-\alpha)$.

proiezione del punto P sull'asse y. In altri termini, il punto P ha coordinate

$$P = (\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{2.1}$$

Dalla definizione è evidente che le funzioni seno e coseno sono limitate tra -1 e 1, in formule

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \ , \tag{2.2}$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \ . \tag{2.3}$$

Inoltre, il punto P corrisponde sia all'angolo α che all'angolo $\alpha + 2\pi$, le funzioni seno e coseno quindi sono periodiche con periodo 2π.

La tabella 2.1 riporta i valori di seno e coseno per alcuni angoli compresi tra 0 e $\pi/2$.

2.2.1 Archi associati

La circonferenza goniometrica ci permette di visualizzare facilmente alcune relazioni tra i valori di seno e coseno per specifiche coppie di angoli. Ad esempio, in figura 2.3a, oltre al punto P, sono riportati i punti P_2, P_3 e P_4 corrispondenti

Angolo radianti	Angolo in gradi	Seno	Coseno
0	0	0	1
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	90°	1	0

Table 2.1: Valori di seno e coseno per vari angoli. Usando le relazioni relative agli archi associati, sezione 2.2.1, e la periodicità possibile ottenere i valori di seno e coseno per molti altri angoli (si veda la sezione esercizi)

agli angoli

$$\alpha_2 = \pi - \alpha \ , \tag{2.4}$$

$$\alpha_3 = \pi + \alpha \ , \tag{2.5}$$

$$\alpha_4 = 2\pi - \alpha \ . \tag{2.6}$$

È immediato riconoscere che il seno dell'angolo α_2 (corrispondente al punto P_2) è identico al seno dell'angolo α (corrispondente al punto P) in quanto P e P_2 hanno lo stesso valore della coordinata y. Mentre, invece, per simmetria abbiamo che il valori del seno per α_3 e α_4 sono l'opposto del seno di α. In formule abbiamo quindi

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \ , \tag{2.7}$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) \ , \tag{2.8}$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin(\alpha) \ . \tag{2.9}$$

Analogamente, per i coseni valgono le seguenti relazioni

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \ , \tag{2.10}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \ , \tag{2.11}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha) \ . \tag{2.12}$$

Altre relazioni possono essere ottenute sfruttando la simmetria rispetto alle bisettrici come riportato in figura 2.3b. In particolare, la x del punto P_5 ha lo stesso valore della y del punto P e la y di P_5 ha lo stesso valore della x di P, in formule

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha) \ , \tag{2.13}$$

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \ . \tag{2.14}$$

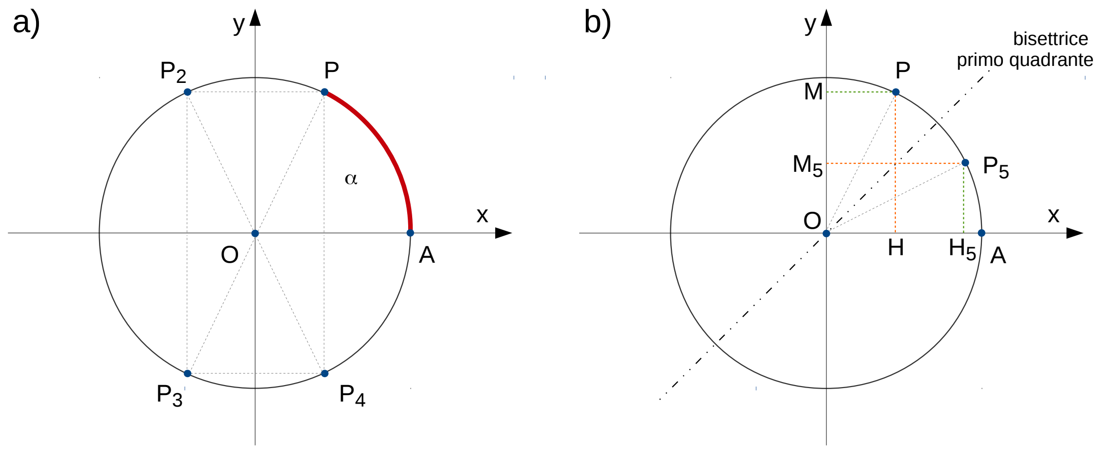

Figure 2.3: Archi associati. a) I punti P e P_2 hanno lo stesso valore della coordinata y e valori opposti per la x. Conseguentemente, hanno lo stesso seno ma coseno opposto. In maniera analoga è possibile derivare tutte le relazioni tra i seni e i coseni degli angoli corrispondenti ai punti P, P_2, P_3 e P_4, si vedano equazioni da (2.7) a (2.12). b) Sfruttando la simmetria rispetto alla bisettrice del primo quadrante è possibile ricavare le relazioni tra i seni e i coseni degli angoli α, corrispondente al punto P, e α_5, corrispondente a P_5. In particolare, $\sin\alpha = \cos\alpha_5$ (linee tratteggiate arancioni PH e P_5M_5) e $\cos\alpha = \sin\alpha_5$ (linee tratteggiate verdi MP e P_5H_5)

2.2.2 Relazione fondamentale della goniometria

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OPH, riportato in figura 2.2 di cateti OH e PH e ipotenusa OP si ha

$$\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 = \overline{OP}^2 \; . \tag{2.15}$$

Sostituendo la (2.1) nella (2.15) e tenendo conto che la lunghezza di OP è il raggio della circonferenza, si ottiene

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1 \; , \tag{2.16}$$

che è nota come prima relazione fondamentale della goniometria.

> **Nota:** L'equazione (2.16) può essere ricavata anche partendo dall'equazione di una circonferenza di centro origine e raggio unitario,
>
> $$x^2 + y^2 = 1 \; , \tag{2.17}$$
>
> e identificando il seno dell'angolo nella coordinata y e il coseno nella coordinata x.

2.3 Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$

La grandezza seno è un numero reale e il suo valore dipende dall'angolo, un altro numero reale. Con il termine seno, quindi, abbiamo indicato una particolare relazione che associa un numero reale (l'angolo) ad un altro numero reale (il valore del seno dell'angolo). Chiameremo questo tipo di relazioni "funzioni di una variabile reale". Una definizione rigorosa verrà data durante i corsi di analisi. Per lo scopo di questo corso preliminare, è sufficiente comprendere quali sono le caratteristiche principali della funzione

$$y = \sin(x) \; . \tag{2.18}$$

In primo luogo, possiamo rappresentare sul un piano cartesiano Oxy alcuni valori noti della funzione seno, ad esempio, possiamo riportare tutti i valori della tabella 2.1 (punti blu pieni nella figura 2.4a). Possiamo poi usare le relazioni relative agli archi associati per posizionare sul grafico anche i punti relativi a valori dell'angolo corrispondenti agli altri quadranti del cerchio goniometrico, (punti blu vuoti in figura 2.4a). A questo punto abbiamo già una buona idea dell'andamento della funzione. Potremmo riprendere il procedimento idealmente per infiniti valori tra 0 e 2π ottenendo la curva in rosso nella figura 2.4a dove è evidente che la funzione presenta un punto di massimo per $x = \pi/2$ ed un punto di minimo per $x = 3\pi/2$. Inoltre, come già riportato nelle equazioni (2.3), la funzione è compresa tra -1 e 1. Diremo che il codominio della funzione è l'intervallo $[-1 : 1]$ [1]. Usando poi la periodicità, possiamo ottenere infine la funzione $y = \sin x$ per ogni valore di x, figura 2.4b.

[1] Nel corso di analisi verranno definiti in maniera rigorosa i concetti di dominio e codominio e vi verrano insegnati metodi generali per dedurre alcune proprietà di una funzione, ad esempio, massimi, minimi e flessi.

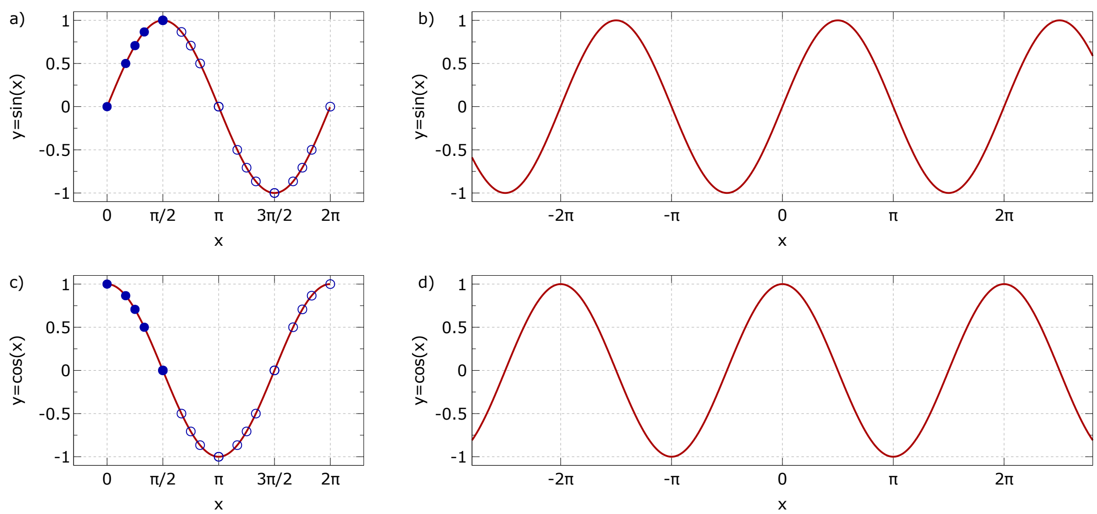

Figure 2.4: Funzioni seno e coseno. a) I cerchi pieni in blu corrispondono ai valori della funzione $y = \sin x$ riportati in tabella 2.1. Usando le relazioni per gli archi associati (2.7-2.9) è possibile dedurre i valori corrispondenti agli altri quadranti (cerchi vuoti). La funzione $y = \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è riportata in rosso. Usando la periodicià, la funzione può essere estesa a tutti i valori della x, pannello b. I pannelli c) e d) si riferiscono alla funzione $y = \cos x$.

In maniera analoga possiamo ottenere la funzione $y = \cos x$, riportata nei pannelli c) e d) della figura 2.4. È interessante notare come i massimi e i minimi di $\sin x$ corrispondono ai valori per cui $\cos x$ ha valore nullo (e, viceversa, i massimi e minimi di $\cos x$ corrispondono ai valori per cui $\sin x = 0$). Inoltre, le due funzioni sono sovrapponibili. Ad esempio, se traslassimo la funzione $\cos x$ di $\pi/2$, le due curve sarebbero perfettamente sovrapposte. In formule, è possibile rappresentare questa relazione come

$$\cos(x - \pi/2) = \sin(x) . \tag{2.19}$$

2.4 La tangente di un angolo

La tangente di un angolo è definita come l'ordinata del punto T di intersezione tra i) la retta passante per l'origine degli assi O e il punto P e ii) la retta tangente alla circonferenza nell'origine degli archi A, figura 2.5a. In altri termini, il punto T ha coordinate $T = (1, \tan(\alpha))$. È evidente che per angoli compresi tra 0 e $\pi/2$ il punto T si troverà nel primo quadrante e, quindi, la tangente dell'angolo avrà valori positivi come mostrato in figura 2.5a. In particolare, per $\alpha = 0$, $\tan(\alpha) = 0$ e i punti A, P e T coincidono. Al crescere dell'angolo α, l'ordinata del punto T cresce e quindi, cresce $\tan\alpha$. Man mano che l'angolo α si avvicina a $\pi/2$, il punto T va sempre più in alto finché, per $\alpha = \pi/2$, la retta passante per O e P e la retta tangente al cerchio nell'origine degli archi A diventano parallele e, quindi, il punto T di intersezione, non esiste. Non può essere quindi definita la tangente dell'angolo $\alpha = \pi/2$.

> **Nota 1:** Durante il corso di analisi acquisirete gli strumenti concettuali per definire in maniera rigorosa il comportamento della tangente per valori dell'angolo α vicini ad $\alpha = \pi/2$. In particolare, direte che il punto $x = \pi/2$ non fa parte del dominio della funzione $y = \tan(x)$, che la funzione $y = \tan(x)$ ha un asintoto verticale per $x = \pi/2$ e che il limite della funzione $y = \tan(x)$ per $x \to (\pi/2)^-$ è infinito, in formule
>
> $$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty , \tag{2.20}$$
>
> dove l'apice "−" nell'espressione $x \to (\pi/2)^-$ indica che ci avviciniamo al punto $\pi/2$ venendo dai valori più piccoli di $\pi/2$. In questa trattazione preliminare faremo a meno di questa formalizzazione rigorosa e ci limiteremo a dire che $\tan(\alpha)$ è positiva per angoli nel primo quadrante e che cresce sempre più man mano che l'angolo si avvicina a $\alpha = \pi/2$.

Un ragionamento analogo può esser fatto per angoli del secondo quadrante, $\pi/2 < \alpha < \pi$, figura 2.5b. In questo caso, il punto T ha ordinata negativa e, quindi, $\tan(\alpha)$ ha valori negativi. Chiaramente, anche in questo caso per $\alpha = \pi/2$ il punto

T non esiste, tuttavia, all'avvicinarsi a $\pi/2$, T si sposta sempre più in basso e, quindi, il valore di $\tan(\alpha)$ valore decresce sempre più man mano che ci avviciniamo a $\alpha = \pi/2$ venendo da angoli del secondo quadrante.

> **Nota 2:** Nel linguaggio accennato nella precedente note diremo che il limite della funzione $y = \tan(x)$ per $x \to (\pi/2)^+$ è meno infinito, in formule
>
> $$\lim_{x\to(\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty \ . \tag{2.21}$$
>
> dove l'apice "+" nell'espressione $x \to (\pi/2)^+$ indica che ci avviciniamo al punto $\pi/2$ venendo dai valori più grandi di $\pi/2$.

Le figure 2.5a e 2.5b mostrano che la retta passante per O e P interseca la circonferenza anche in un altro punto P_2. Quindi il valore di $\tan(\alpha)$ per angoli corrispondenti a P e P_2 è lo stesso. La differenza tra gli angoli corrispondenti a P e P_2 è esattamente un angolo piatto, quindi abbiamo, che

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \ , \tag{2.22}$$

cioè la tangente ha periodo π e non 2π come il seno e il coseno.

2.4.1 Relazione tra tangente, seno e coseno

È possibile esprimere la tangente dell'angolo α in termini di $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$. Con riferimento alla figura 2.5a, abbiamo che i triangoli OPH e OTA sono simili, cioè

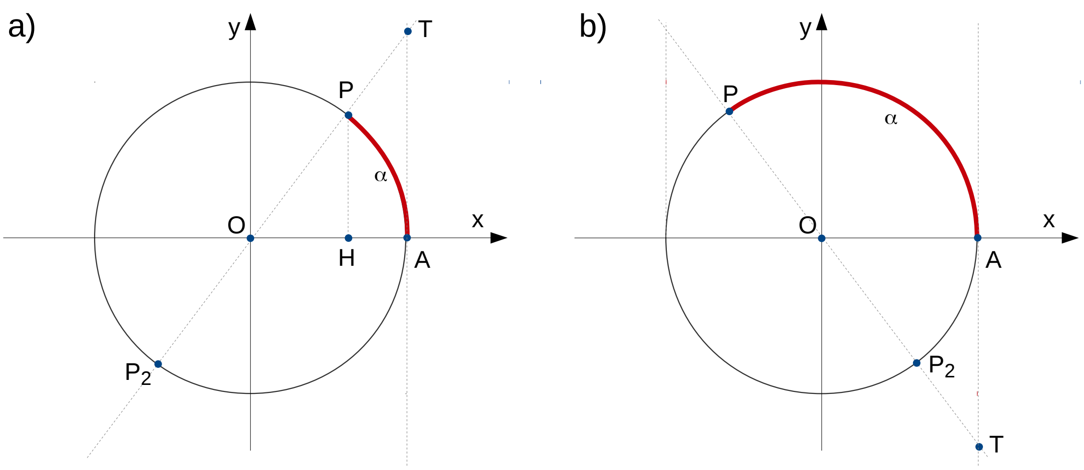

Figure 2.5: La tangente dell'angolo α, corrispondente al punto P sulla circonferenza goniometrica, è l'ordinata del punto T ottenuto come intersezione della retta passante per P ed O e per la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A. Nel pannello *a*) è riportato un caso con angolo α nel primo quadrante ($0 < \alpha < \pi/2$). In questo caso $\tan(\alpha)$ è positiva. Viceversa, per $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\tan(\alpha) < 0$ in quanto il punto T si trova nel quarto quadrante, pannello b). In ambedue i pannelli sono riportati anche i punti P_2 corrispondenti ad angoli $\alpha + \pi$. È evidente che il punto T è lo stesso sia per α che per $\alpha + \pi$. La funzione $\tan(\alpha)$ è quindi periodica con periodo π.

riscalando tutti i lati per lo stesso fatto, risultano sovrapponibili. In particolare, abbiamo che i rapporti tra i lati corrispondenti, son gli stessi, in formule

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{TA}} \ . \tag{2.23}$$

Usando solo la seconda eguaglianza, e riarrangiando i termini, abbiamo che

$$\overline{TA} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} \overline{OA} \ , \tag{2.24}$$

che, considerando che $\overline{OA} = 1$ (è il raggio della circonferenza goniometrica), diventa

$$\overline{TA} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} \ . \tag{2.25}$$

Per definizione sappiamo che $\overline{PH} = \sin(\alpha)$ e $\overline{OH} = \cos(\alpha)$, mentre $\overline{TA}$ è proprio la tangente dell'angolo α, quindi

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ . \tag{2.26}$$

L'equazione (2.26) è nota come seconda relazione fondamentale della goniometria.

Nota 3: È istruttivo rileggere le osservazioni relative alle note 2 e 3 alla luce della seconda relazione della goniometria, equazione (2.26). Difatti, per $\alpha = \pi/2$, si ha $\sin(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$ e, quindi, $\tan(\pi/2) = 1/0$ che non è un'operazione ammessa. Ragioniamo quindi su cosa accade alla (2.26) per valori si α via via più vicini a $\pi/2$. Il valore di $\sin(\alpha)$ si avvicinerà a 1 mentre il valore di $\cos(\alpha)$ diventerà via via più piccolo (pur restando sempre positivo). Avremo quindi che $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ sarà un numero sempre più grande. Questo comportamento, nel linguaggio rigoroso che apprenderete nel corso di analisi I, verrà formalizzato nel concetto di limite e in espressioni analoghe alla (2.20). In maniera simile si può ragionare per angoli che si avvicinano a $\pi/2$ da valori maggiori. In questo caso, $\sin(\alpha)$ resta positivo (e si avvicina a 1) mentre $\cos(\alpha)$ si avvicina a 0 ma partendo da valori negativi (i coseno nel secondo quadrante è negativo). Per questa ragione, in questo caso, il limite è $-\infty$ e non $+\infty$, equazione 2.21.

Le funzioni inverse: arcoseno e arcocoseno

Finora abbiamo trattato le funzioni goniometriche fissando l'angolo α e ricavando (o definendo) il valore del seno e del coseno. In molti casi, può capitare di avere il problema inverso, ad esempio: "qual è l'angolo α che ha valore $\sqrt{3}/2$, o 0.64, o -0.35?". Questa "operazione inversa" viene indicata come arcoseno, e scriveremo,

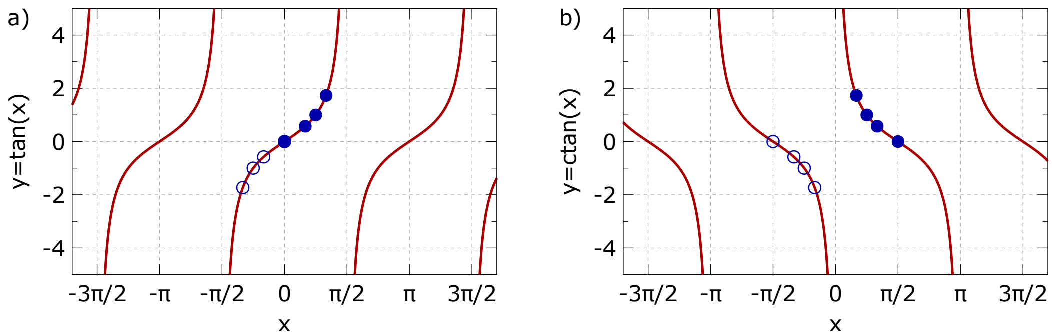

Figure 2.6: Il pannello a) riporta la funzione $y = \tan(x)$. Anche in questo caso, come per le funzioni $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ in figura 2.4, i punti blu pieni corrispondono ai dati della tabella 2.1 mentre i punti blu vuoti sono ottenuti usando le reazioni per gli altri associati. Il pannello b) riporta invece la funzione $y = \mathrm{ctan}(x)$, si veda sezione esercizi.

quindi $\alpha = \arcsin a$, dove a è il valore del seno (esempio: $a = \sqrt{3}/2$, o $a = 0.64$, o $a = -0.35$) e α è l'angolo.

Sappiamo già che questa domanda non ha una risposta unica, anzi, dato che le funzioni seno e coseno sono periodiche, se esiste un angolo α che ha un certo valore del seno, ne esistono infiniti altri ($\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, ... che avranno lo stesso valore. Questa molteplicità di soluzioni pone alcune difficoltà nel definite una funzione inversa del seno. In particolare, per ragioni che saranno più chiare nel corso di Analisi, è comodo lavorare con funzioni a un sol valore, cioè quando scriviamo $y = f(x)$ vorremmo che per ogni x appartenente all'insieme di definizione, esista solo un valore y. Per far si che la funzione arcoseno rispetti questo requisito, dobbiamo limitare la sua definizione. In particolare, diremo che la funzione arcoseno di x è l'angolo compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ che ha come seno x. Nel linguaggio che vedrete nel corso di Analisi I, direte che

$$y = \arcsin x$$

ha come dominio $-1 \leq x \leq 1$, cioè, non esistendo alcun angolo che ha seno maggiore di 1 o minore di -1, la funzione $\arcsin x$ ha senso solo per $-1 \leq x \leq 1$ ed ha come codominio $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

Possiamo costruire il grafico delle funzione $\arcsin x$ usando i dati della tabella 2.1. È interessante notare che il grafico è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante alla funzione $\sin x$ limitata al tratto $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. In maniera analoga, si può definire la funzione arcocoseno. Qual è l'insieme di definizione? Qual è il codominio? Si lasciano questi esercizi (non banali) agli studenti.

2.4.2 La funzione $\tan x$

Seguendo la stessa logica introdotta nella sezione 2.3, possiamo introdurre la funzione $\tan(x)$. In particolare, dalla seconda relazione fondamentale della goniometria, eq. (2.26), otteniamo immediatamente

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \ . \tag{2.27}$$

Il grafico della funzione $\tan(x)$ è riportato in figura 2.6. È possibile riconoscere nel grafico alcune caratteristiche che abbiamo già individuato nelle sezioni precedenti. Ad esempio, la funzione $\tan(x)$ è positiva per angoli corrispondenti al primo quadrante ($0 < \alpha < \pi/2$) e negativa per angoli del secondo quadrante ($\pi/2 < \alpha < \pi$). Cioè e dovuto al fatto che $\sin(x)$ è positiva in ambo i quadranti mentre $\cos(x)$ cambia segno tra primo e secondo quadrante. Inoltre, la funzione è periodica con periodo π. Questa relazione si può dimostrare semplicemente usando gli archi associati, difatti, dalle (2.8) e (2.11) sappiamo che

$$\sin(\pi + \alpha) \ = \ -\sin(\alpha) \ , \tag{2.28}$$

$$\cos(\pi + \alpha) \ = \ -\cos(\alpha) \ . \tag{2.29}$$

$$\tag{2.30}$$

e quindi possiamo calcolare la tangente dell'angolo $x = \pi$ come

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{2.31}$$

che, dalla (2.27) è proprio $\tan(x)$.

Per completezza, il pannello b) della figura 2.6 riporta anche la funzione cotangente di x, $y = \text{ctan}(x) = \cos(x)/\sin(x)$. La cotangente è definita come l'ascissa del punti T di intersezione tra la retta orizzontale tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $(0, 1)$, corrispondente all'angolo $\alpha = \pi/2$, e la retta passante per i punti O e P. Tutte le sue proprietà sono ricavabili con procedimenti analoghi a quelli usati per la tangente.

2.5 Alcune formule goniometriche

A partire dalle definizioni date, è possibile dimostrare una serie di relazioni molto utili nei calcoli, come, ad esempio, l'espressione del seno della somma di due angoli α e β, $\sin(\alpha + \beta)$ in funzione di $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ e $\cos(\beta)$. La tabella 2.2 riporta alcune relazioni di uso frequente. Per brevità, non riporteremo alcuna dimostrazione. Facciamo solo notare come, data una singola relazione per la somma o differenza di angoli, possibile ricavare tutte le altre usando le relazioni per gli archi associati. Ad esempio, assumendo che sia vera la relazione che dà l'espressione $\cos{(\alpha - \beta)}$, basta applicarla a $\cos \alpha - (-\beta)$ e usare le relazioni per gli archi associati per ottenere la relazione per $\cos \alpha + \beta$.

Relazioni fondamentali e definizioni	
relazione fondamentale della goniometria	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
definizione di tangente	$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Somma di angoli	
coseno della differenza	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
seno della differenza	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
tangente della differenza	$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
coseno della somma	$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
seno della somma	$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
tangente della somma	$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
Duplicazione	
duplicazione coseno	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
duplicazione seno	$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos\alpha$
duplicazione tangente	$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$
Bisezione	
bisezione coseno	$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$
bisezione seno	$\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$
bisezione tangente	$\tan(\alpha/2) = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

Table 2.2: Sunto delle principali relazioni trigonometriche. Si noti come data una singola relazione per la somma o differenza di angoli, è possibile ricavare tutte le altre usando le relazioni per gli archi associati. Analogamente, le formule di duplicazione sono direttamente dimostrabili a partire dalle formule per la somma ponendo $\alpha = \beta$.

2.6 Equazioni trigonometriche elementari

In questa sezione mostreremo come risolvere alcune semplici equazioni che coinvolgono funzioni goniometriche. Iniziamo considerando il caso elementare

$$\sin(x) = a \; . \tag{2.32}$$

Se $a > 1$ o $a < -1$ l'equazione non ha alcuna soluzione in quanto non esiste alcun angolo per cui il seno è maggiore di uno o minore di meno uno. Se $-1 \leq a \leq 1$, invece, abbiamo soluzioni. Come esempio particolare consideriamo l'equazione

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \; . \tag{2.33}$$

Dalla tabella 2.1 sappiamo che $\sin(\pi/6) = 1/2$, per cui, una soluzione della (2.33) è

$$x = \frac{\pi}{6} \; . \tag{2.34}$$

Tuttavia, il nostro obiettivo non è trovare una specifica soluzione della (2.33) ma tutte. Nel caso delle funzioni trigonometriche, per trovare tutte le possibili soluzioni, dobbiamo tener conto di due cose: la periodicità e gli archi associati. Sappiamo che $\sin(x)$ è una funzione periodica di periodo 2π. Questo, in formule, vuol dire che

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \; . \tag{2.35}$$

dove la dicitura $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ si legge "per ogni k appartenente a $\mathbb{Z}$" dove $\mathbb{Z}$ è l'insieme degli interi positivi e negativi (compreso lo zero). La relazione (2.35) ci dice che se $\pi/6$ è soluzione dell'equazione, lo sono anche, ad esempio $13\pi/6$ e $-11\pi/6$. Le infinite soluzioni della (2.35) possono essere quindi scritte come

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \; . \tag{2.36}$$

Tuttavia, anche limitandoci all'intervallo $x \in [0, 2\pi]$, $x = \pi/6$ non è l'unico arco ad avere come seno il valore $1/2$. Difatti, dalle relazioni degli archi associati sappiamo $x = \pi - \pi/6$ ha lo stesso seno di $\pi/6$. Abbiamo quindi che tutte le soluzioni della (2.35) possono essere scritte come

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \; , \tag{2.37}$$

dove il simbolo $\cup$ indica l'unione dei due insiemi.

In maniera analoga possono essere risolte le equazioni elementari nella forma $\cos x = a$ e $\tan x = a$, nell'ultimo caso, di tenga conto che il periodo della tangente è π e non 2π.

Insieme	Simbolo	Esempi
Numeri Naturali	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Numeri Interi	$\mathbb{Z}$	$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
Numeri Razionali	$\mathbb{Q}$	$\{\ldots, -13/3, \ldots, 0, 1/2, \ldots\}$
Numeri Reali	$\mathbb{R}$	$\{\ldots - \pi, \ldots, 0, \}$

Table 2.3: Principali insiemi numeri ed esempi. In alcuni testi, nei numeri naturali è incluso lo zero. Si noti che, ogni insieme include l'insieme successivo, ad esempio, i numeri interi sono anche numeri razionali e numeri reali ma non tutti i razionali sono interi. In formule, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2.7 Esercizi

1. Usando le relazioni per gli archi associati e la periodicità, trovare il valore di seno e coseno per $\alpha = 4\pi/3$, $\alpha = -\pi/2$, $\alpha = 7\pi/6$, $\alpha = 5\pi$, $\alpha = -\pi/4$.
2. Le equazioni (2.14) sono state ottenute ragionando nel primo quadrante ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$). Valgono anche per altri quadranti? In caso negativo, ricavare le relazioni per gli altri quadranti.
3. Per $\alpha = \pi/12$ si ha $\cos\alpha = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. Calcolare il valore di $\sin\alpha$.
4. Per $\alpha = 15\pi/8$ si ha $\sin\alpha = (\sqrt{2 - \sqrt{2}}/2$. Calcolare il valore di $\cos\alpha$.
5. Dimostrare che $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$. (suggerimento, partire da un quadrato, partizionarlo in triangoli opportuni e applicare il teorema di Pitagora)
6. Dimostrare che $\sin\pi/6 = \sqrt{1/2}$ (suggerimento, come sopra ma partire da un triangolo equilatero)
7. Calcolare il valore di $\tan\pi/3$ a partire dai valori di seno e coseno.
8. Calcolare il valore di $\tan 4\pi/3$.
9. Calcolare il valore di $\tan 3\pi/4$.
10. Rappresentare il grafico della funzione $y = \sin(2x)$. Qual è il periodo della funzione?
11. Rappresentare il grafico della funzione $y = \sin(-2x)$. Qual è il periodo della funzione?
12. Rappresentare il grafico della funzione $y = \cos(\frac{x}{2})$. Qual è il periodo della funzione?
13. Rappresentare il grafico della funzione $y = \cos(-\frac{x}{2})$. Qual è il periodo della funzione?
14. Rappresentare il grafico della funzione $y = \tan(\frac{x}{\pi})$. Qual è il periodo della funzione? Dove dono gli asintoti?
15. Risolvere le seguenti equazioni

$$\sin x = -\sqrt{2}/2 \tag{2.38}$$
$$\cos x = 1/2 \tag{2.39}$$
$$\tan x = 2 \tag{2.40}$$
$$\cos x = -1/2 \tag{2.41}$$
$$\tag{2.42}$$

16. Risolvere le seguenti equazioni

$$\tan(2x) = 2 \tag{2.43}$$
$$\cos(3x) = \sqrt{3}/2 \tag{2.44}$$
$$\tan(2x) = 2 \tag{2.45}$$

17. Risolvere le seguenti equazioni (suggerimento, usare $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

$$2\cos^2(x) + 3\sin(x) - 3 = 0 \tag{2.46}$$

$$2\sin^2(x) + \cos^2(x) - 1 = 0 \tag{2.47}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) - \sin(x) = 0 \tag{2.48}$$

18. Risolvere le seguenti equazioni (suggerimento[2], mettere a sistema con $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 \tag{2.49}$$

$$(\sqrt{3} + 2)\cos(x) + \sin(x) + 1 = 0 \tag{2.50}$$

$$\cos(x) + 2\sin(x) + 1/3 = 0 \tag{2.51}$$

$$2\cos(x) + \sin(x) - 1/3 = 0 \tag{2.52}$$

[2]Questa tipologia di equazioni va sotto il nome di "equazioni goniometriche lineari". Esistono varie tecniche risolutive valide. Noi qui suggeriamo di mettere a sistema con la prima relazione fondamentale della goniometrica, tutavia, potere risolvere anche usando le formule parametriche che esprimono $\sin(x)$ e $\cos(x)$ in funzione di $\tan(x/2)$.

Chapter 3

Vettori

In questo capitolo introdurremo il concetto di vettore e le principali operazioni. Una trattazione matematicamente rigorosa di questi argomenti sarà oggetto del corso di Geometria I.

3.1 Definizione di vettore

Consideriamo due punti A e B nello spazio. Questi due punti definiscono un segmento orientato che indicheremo con $\overrightarrow{AB}$, figura 3.1. La pendenza della retta che passa per A e B è detta **direzione** del segmento orientato, la sua lunghezza $\overline{AB}$ è detta **modulo** del segmento orientato, mentre A è detto **punto di applicazione**. Per distinguere poi il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ da $\overrightarrow{BA}$, diremo che hanno **verso** differente. In sintesi, un segmento orientato è completamente definito da: direzione, verso, lunghezza e punto di applicazione.

In figura figura 3.1, sono rappresentati anche altri segmenti orientati, ad esempio $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$. Tutti i segmenti rappresentati sono sovrapponibili tra loro con una traslazione. Questo gruppo di segmenti orientati condivide quindi, direzione, verso e modulo ma ognuno di essi ha un punto di applicazione diverso. Diremo che questi segmenti sono equipollenti e chiameremo vettore la classe che accomuna questi segmenti, cioè un ente che condivide tutte e sole le proprità comuni a una gruppo di segmenti equipollenti. Il vettore, quindi, è completamente definito in quando sono definite, direzione, verso e modulo. Tutti i segmenti equipollenti rappresentati in figura 3.1 possono essere usati per rappresentare lo stesso vettore.

> **Nota:** Una definizione più rigorosa di vettore, richiede una definizione precisa del concetto di classi di equivalenza e di segmenti orientati equipollenti. In questi richiami di matematica di base, non introdurremo tali nozioni ma ci limiteremo a mostrare alcune operazioni basilari che permettono di affrontare alcuni calcoli elementari usando i vettori.

Esistono varie notazioni per indicare un vettore. Una notazione comune è indicare il vettore con una freccia, ad esempio $\vec{v}$. Su altri testi, invece, il vettore viene indicato solamente con una linea $\overline{v}$. Infine, un'altra notazione molto comune è di

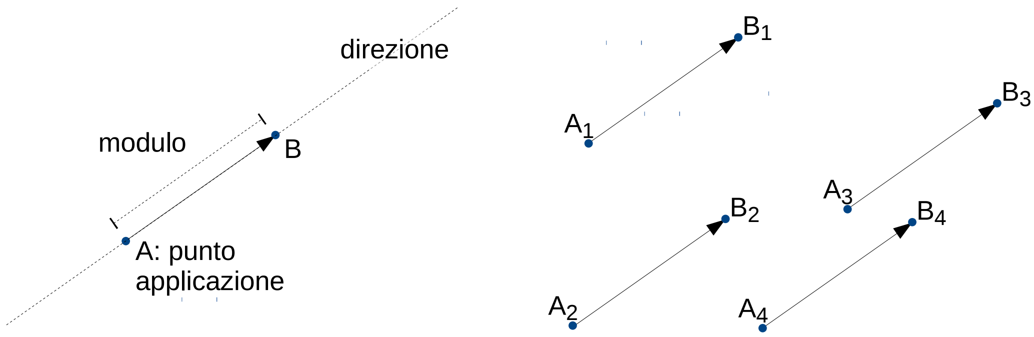

Figure 3.1: Segmenti orientati e concetto di vettore. La figura riporta 5 segmenti orientati sovrapponibili tra loro grazie a una traslazione (segmenti equipollenti). Ogni segmento è definito completamente dalla retta su cui giace, dal verso ($A \to B$ o $B \to A$), dalla sua lunghezza (modulo) e dal punto di applicazione. Ognuno dei questi segmenti può essere usato per rappresentare lo stesso vettore che quindi, è definito unicamente dalle tre proprietà che hanno in comune tutti i segmenti, cioè direzione, verso e modulo.

usare simboli in grassetto, in vettore è quindi indicato come $\mathbf{v}$. In questo documento, preferiremo quest'ultima notazione. Il modulo del vettore $\mathbf{v}$ sarà indicato come $|\mathbf{v}|$. Chiameremo inoltre vettore nullo il vettore che ha lunghezza nulla (non sono quindi definiti direzione e verso) e versore un qualunque vettore di modulo unitario. Per indicare i versori useremo la notazione $\hat{\mathbf{v}}$.

3.1.1 Rappresentazione cartesiana

La figura 3.2 riporta il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$, e, lo stesso segmento, applicato all'origine degli assi di un sistema cartesiano $\overrightarrow{OP}$. I due segmenti rappresentano lo lo stesso vettore che indicheremo con $\mathbf{v}$. Questa osservazione ci permette di associare al vettore $\mathbf{v}$ il punto P di coordinate P_x, P_y. Chiameremo l'ascissa e l'ordinata del punto P componenti del vettore e diremo che il vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto per componenti come

$$\mathbf{v} = (P_x, P_y) \ . \tag{3.1}$$

Questa rappresentazione è quella più comunemente usata nei calcoli.

3.2 Operazioni sui vettori

3.2.1 Moltiplicazione per uno scalare

Possiamo moltiplicare un vettore $\mathbf{v}$ per un numero reale (scalare) a. L'operazione ha come un risultato un altro vettore $\mathbf{u}$. In formule scriveremo

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v} \ . \tag{3.2}$$

Il vettore $\mathbf{u}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{v}$, lunghezza (modulo) a volte il modulo di $\mathbf{v}$ e verso uguale a $\mathbf{v}$ per $a > 0$ e opposto a $\mathbf{v}$ per $a < 0$. Nella rappresentazione per

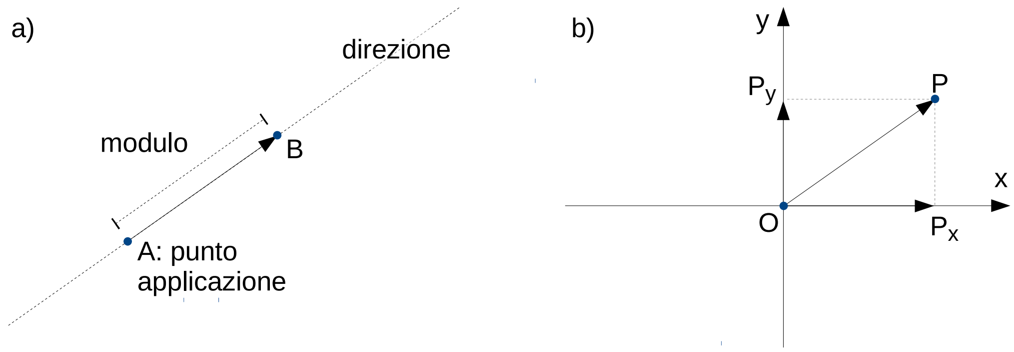

Figure 3.2: Rappresentazione cartesiana di un vettore. I segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OP}$ hanno stessa direzione, verso e modulo. Rappresentano quindi lo stesso vettore. Possiamo quindi associare ad ogni vettore un punto nello spazio cartesiano.

componenti, abbiamo che

$$\mathbf{v} = (P_x, P_y) \quad , \quad \mathbf{u} = a\mathbf{v} = (aP_x, aP_y) \tag{3.3}$$

La definizione di moltiplicazione per uno scalare, ci permette di scrivere il versore corrispondente al vettore $\mathbf{v}$ come

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \; . \tag{3.4}$$

3.2.2 Somma di vettori

L'operazione somma tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ dà un altro vettore $\mathbf{w}$, in formule scriveremo

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \; . \tag{3.5}$$

Il vettore $\mathbf{w}$ si ottiene graficamente nel seguente modo riportato in figura 3.3a. Si scelga un qualunque segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ corrispondente al vettore $\mathbf{v}$. Per il vettore $\mathbf{u}$ si scelga invece, tra gli infiniti segmenti orientati, quello che ha origine nel punto B, indicheremo questo segmento orientato come $\overrightarrow{BC}$. Il segmento orientato risultate $\overrightarrow{AC}$ è un rappresentante del vettore $\mathbf{w}$. Si noti che la costruzione può essere effettuata anche invertendo il ruolo dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, difatti, possiamo scegliere per $\mathbf{u}$ il segmento orientato $\overrightarrow{AD}$ e, come rappresentante del vettore $\mathbf{v}$, il segmento orientato $\overrightarrow{DC}$. Il risultato è lo stesso. Questo semplice esempio indica che l'operazione somma di vettori è commutativa, cioè, $\mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$. La costruzione grafica riportata viene indicata spesso come "regola del parallelogramma". Difatti il segmento orientato $\overrightarrow{AC}$ è la diagonale con origine in A di un parallelogramma che ha come lati i segmenti orientati corrispondenti ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$.

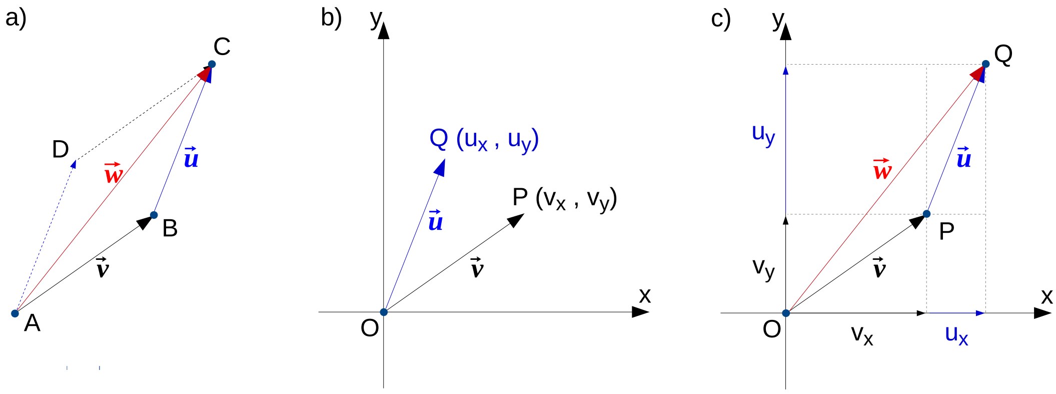

Figure 3.3: Somma di vettori. a) Metodo grafico. Per ottenere il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ possiamo applicare il versore $\mathbf{v}$ al punto A, ottenendo il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$. Applichiamo ora il vettore $\mathbf{v}$ al punto B. Il segmento orientato $\overrightarrow{BC}$ è un rappresentante del vettore $\mathbf{u}$. I pannelli b) e c) mostrano come l'operazione di somma nella rappresentazione cartesiana possa essere effettuata sommando le componenti dei due vettori. Ad esempio, la componente w_x è ottenuta come $u_x + v_y$.

Nota: Una volta definite le operazioni somma e moltiplicazione per scalare, è possibile calcolare anche la differenza tra vettori, difatti $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Se i vettori sono espressi in componenti cartesiane, è possibile calcolare la somma di vettori sommando le componenti, in formule,

$$\mathbf{w} = (w_x, w_y) \ , \tag{3.6}$$

$$w_x = u_x + u_y \ , \ w_x = u_x + u_y \ . \tag{3.7}$$

I pannelli b) e c) della figura 3.3 mostrano una rappresentazione grafica dell'espressione (3.7).

3.2.3 Prodotto scalare

Il prodotto scalare associa a due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ un numero reale (cioè una grandezza scalare) dato da

$$s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos\theta \ , \tag{3.8}$$

dove l'angolo θ è l'angolo che si ottiene applicando i due vettori nello stesso punto A, figura 3.4. Dalla definizione data si deducono facilmente le seguenti proprietà:

- Dalle proprietà degli archi associati, sappiamo che $\cos(2\pi - \theta) = \cos(\theta)$. Quindi, per il calcolo della espressione (3.8), possiamo usare sia l'angolo concavo che convesso. Per comodità, d'ora in poi ci riferiremo sempre all'angolo convesso, cioè $\theta \leq \pi$.
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ è positivo se l'angolo è acuto ($\theta < \pi/2$).
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ è nullo se l'angolo è retto ($\theta = 0$).

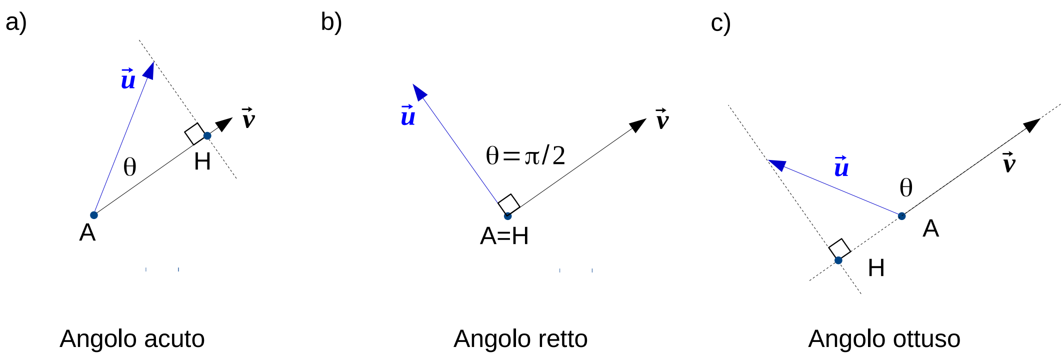

Figure 3.4: Prodotto scalare. Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il prodotto scalare può essere calcolato come $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}| \cos\theta$. Il termine $|\mathbf{u}| \cos\theta$ è la lunghezza del segmento AH ottenuto applicando i due vettori allo stesso punto A e proiettando il vettore $\mathbf{u}$ sulla retta su cui giace il vettore $\mathbf{v}$. Per angoli acuti, il prodotto scalare è positivo mentre per angoli acuti è negativo ($\pi/2 < \theta < \pi$, $\Rightarrow \cos\theta < 0$). Nel caso i due vettori sono ortogonali, il prodotto scalare è nullo.

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ è negativo se l'angolo è ottuso ($\theta > \pi/2$).
- il prodotto scalare è commutativo, cioè $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Inoltre, dalla costruzione geometrica riportata in figura 3.4, è possibile dare una interpretazione geometrica del prodotto scalare. Applicando ambedue i vettori $\mathbf{v}$ $\mathbf{u}$ al punto A, è evidente che il prodotto scalare è dato dal prodotto del modulo del vettore $\mathbf{v}$ per la lunghezza del segmento AH ottenuto proiettando la punta del vettore $\mathbf{u}$ sulla retta su cui giace $\mathbf{v}$. Il segno del prodotto scalare è dato invece dalla regola sopra citata. Analoga costruzione può esser fatta invertendo i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$.

3.2.4 Rappresentazione per componenti

L'espressione del prodotto scalare in funzione delle componenti dei vettori è

$$s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = u_x v_x + u_y v_y \ . \tag{3.9}$$

La dimostrazione di questa equazione può essere ricavata riscrivendo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ utilizzando modulo e versore del vettore stesso, come

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\, \hat{\mathbf{v}} \quad , \quad \mathbf{u} = |\mathbf{u}|\, \hat{\mathbf{u}} \quad . \tag{3.10}$$

Sostituendo le (3.10) nella (3.9), abbiamo

$$s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \ . \tag{3.11}$$

Il prodotto scalare tra i due versori, può essere scritto come

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \hat{u}_x \hat{v}_x + \hat{u}_y \hat{v}_y \ . \tag{3.12}$$

Le componenti dei versori $\hat{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ possono essere espresse in termini di seno e coseno degli angoli che i due versori fanno con l'asse x. Indicati questi angoli come θ_u θ_v, abbiamo $\theta = \theta_u - \theta_v$. Usando ora l'espressione per il coseno della differenza degli angoli, tabella 2.2,

$$\cos\theta = \cos(\theta_u - \theta_v) = \cos\theta_u \cos\theta_v + \sin\theta_u \sin\theta_v \ . \tag{3.13}$$

otteniamo immediatamente la (3.12).

> **Nota:** Abbiamo definito il prodotto scalare solo nel piano. È possibile generalizzare la definizione a uno spazio con qualunque numero di dimensioni. Questa generalizzazione sarà oggetto del corso di Geometria. Nel contesto introduttivo di queste dispense, ci limitiamo a riportare l'espressione del prodotto scalare nello spazio tridimensionale in funzione delle componenti dei due vettori
>
> $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \ . \tag{3.14}$$

3.3 Prodotto vettoriale

Un'altra operazione tra vettori che appare in vari ambiti del corso di ingegneria è il prodotto vettoriale. Il prodotto vettoriale si indica comunemente sia con il simbolo "$\times$" che con il simbolo "$\wedge$", in queste note, useremo la prima notazione. Il prodotto vettoriale è definito solo per vettori dello spazio 3D e il risultato, a differenza del prodotto scalare, è un vettore, scriveremo quindi

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \ . \tag{3.15}$$

Vediamo ora come è definito il prodotto vettoriale. Immaginiamo di applicare i due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ allo stesso punto A dello spazio. Il prodotto vettoriale tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è un vettore che ortogonale al piano in cui giacciono $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di modulo pari a $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$ dove θ è l'angolo convesso ($\theta < \pi$) tra i due vettori. Il verso del vettore viene invece determinato con il seguente protocollo: si prenda il vettore $\mathbf{u}$ e lo si ruoti sul piano definito da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in senso antiorario mantenendo fisso il punto A Se si raggiunge $\mathbf{v}$ ruotano meno di π, allora il verso del vettore è "uscente" dal piano, altrimenti è entrante. Questa definizione, apparentemente complessa, viene in genere tradotta nella regola della mano destra. Si punta il pollice nella direzione del primo fattore del prodotto e l'indice in quella del secondo: il medio dà la direzione del prodotto vettoriale. Da questa definizione è evidente che invertendo l'ordine dei vettori, cambia il verso del vettore risultante.

Nota: Spesso viene riportato che il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma di lati **u** e **v**. Infatti, l'area del parallelogramma si calcola moltiplicando la base per l'altezza, consideriamo **u** come base, l'altezza sarà data da $|\mathbf{v}| \sin\theta$, da cui $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta$. Questa definizione rende evidente che se due vettori hanno la stessa direzione, il loro prodotto vettoriale è nullo. Difatti, il parallelogramma si riduce a un segmento (o, in formule, $\sin 0 = \sin\pi = 0$).

Riportiamo per completezza l'espressione del prodotto vettoriale in funzione delle componenti dei vettori **u** e **w**,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \tag{3.16}$$

$$w_x = u_y v_z - u_z u_y \tag{3.17}$$

$$w_y = u_z v_x - u_x u_z \tag{3.18}$$

$$w_z = u_x v_y - u_y u_x \tag{3.19}$$

pur non riportandone la dimostrazione, suggeriamo di utilizzare il caso particolare in cui vettori **u** e **v** giacciano sul piano Oxy, cioè $u_z = v_z = 0$, e verificare, usando la formula della differenza dei seni, tabella 2.2, che la (3.19) è vera.

3.4 Esercizi

1. Dati i vettori $\mathbf{a} = (-1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$ e $\mathbf{c} = (2/3, -2)$,
   (a) Calcolare il modulo dei tre vettori.
   (b) Calcolare le componenti x e y dei tre versori $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{c}}$
   (c) Rappresentare sul piano sia i tre vettori che i rispettivi versori
   (d) Calcolare $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})$ e $(-\mathbf{c} - 4\mathbf{a})$
   (e) Calcolare l'angolo θ tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e l'angolo α tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$.
   (f) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

2. Come sopra ma per i vettori nello spazio $\mathbf{a} = (0, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -1)$ e $\mathbf{c} = (-2/3, -2, 4)$.

3. Nel piano Oxy, trovare il vettore $\mathbf{a}$ di lunghezza $|\mathbf{a}| = 3$ ortogonale a $\mathbf{b} = (1, 2)$. (suggerimento, è un solo?)

4. Il vettore $\mathbf{a}$ fa un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'asse x (in senso antiorario) ed ha modulo $|\mathbf{a}| = 2$. Trovarne le componenti cartesiane.

5. Dati i vettori dell'esercizio 2, calcolare i prodotti vettoriali

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \, ,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} \, .$$

6. Dato il vettore $\mathbf{a}$ dell'esercizio 2, calcolare i prodotti scalari e vettoriali

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \, ,$$

$$\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{a}) \, ,$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} \, ,$$

$$\mathbf{a} \times (-\mathbf{a}) \, .$$

Chapter 4

Esponenziali e logaritmi

4.1 Potenze, radici e logaritmi

Definiamo l'operazione potenza a^n, con a un numero reale, detto base, ed n un numero intero positivo, detto esponente, il prodotto di $a \cdot a \cdot a \ldots$ tante volte quante indicate dal valore n, in formule

$$b = a^n \equiv \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{n \text{ volte}} \quad . \tag{4.1}$$

Si noti che, se la base a è positiva, il valore di $b = a^n$ è positivo qualunque sia n. Se invece la base a è negativa, la potenza $b = a^n$ è negativa se n è dispari ed è positiva se n è pari.

In maniera analoga, possiamo definire un'operazione inversa all'operazione di potenza: l'operazione di radice. Chiameremo radice n-esima di b (e la indicheremo col simbolo $\sqrt[n]{b}$) il numero reale a che, elevato ad n, da b, in formule

$$\sqrt[n]{b} = a \;\Leftrightarrow\; a^n = b \; . \tag{4.2}$$

È interessante notare come, nel cotesto presentato, la definizione di radice n-esima non ha senso se n è pari e b è negativo. Difatti, in questo caso, non esiste alcun numero a che, moltiplicato un numero pari di volte per se stesso, dia b.

> **Nota:** Nel corso di Analisi I, vedrete che, con opportune definizioni, è possibile dare un significato anche alle radici pari di numeri negativi. In particolare, verrà indicata con $i = \sqrt{-1}$ l'unità immaginaria e sarà definito un nuovo insieme di numeri indicato come *numeri complessi*.

L'operazione potenza non è commutativa, ad esempio, $3^5 \neq 5^3$. Per questa ragione, oltre all'operazione inversa radice n-esima definita sopra, è possibile definire una seconda operazione inversa detta logaritmo. Il logaritmo di un numero rispetto a una certa base è l'esponente per cui si deve elevare quella base per ottenere il numero dato, in formule

$$\log_a b = n \;\Leftrightarrow\; a^n = b \; . \tag{4.3}$$

Come per l'operazione radice, anche l'operazione logaritmo impone dei vincoli per i valori di a e b. Esistono cioè dei valori di a e b per cui l'operazione non ha senso. Tuttavia, prima di introdurre questi vincoli, è opportuno generalizzare l'operazione potenza, qui definita solo per esponenti n interi positivi, in primo luogo per esponenti razionali (positivi e negativi) e, poi, per esponenti reali.

4.1.1 Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze sono conseguenze dirette delle definizioni date per potenza e radice e delle proprietà delle moltiplicazioni e delle divisioni.

Dalla proprietà associativa delle moltiplicazione, cioè, *in una moltiplicazione in cui sono coinvolti tre o più fattori possiamo sostituire due qualsiasi fattori consecutivi con il loro prodotto, senza che il risultato finale della moltiplicazione cambi*, discende direttamente che

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad . \tag{4.4}$$

Difatti, dalla definizione (4.1), si ha che

$$a^{n+m} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{(m+n)\ volte} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{n\ volte} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{m\ volte} = a^n \cdot a^m \quad . \tag{4.5}$$

dove nel secondo passaggio è stata usata la proprietà associativa delle moltiplicazione. Con un procedimento analogo, sempre ricorrendo alla proprietà associativa delle moltiplicazione, possiamo mostrare che

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad . \tag{4.6}$$

Si può ottenere invece la proprietà che permette di esprimere la divisione tra potenze con la stessa base, cioè

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \tag{4.7}$$

scrivendo esplicitamente a^n ed a^m e semplificando m volte a dalla frazione risultate, in formule

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{n\ volte}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{m\ volte}} = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{(m-n)\ volte} = a^{n-m} \quad . \tag{4.8}$$

Per la definizione di potenza data finora, quest'ultima relazione vale solo se $n > m$. Inoltre, m e n sono interi positivi. Vedremo nelle prossime sezioni come le proprietà appena introdotte rendono ragionevole l'estensione della definizione di potenza anche per esponenti n che non siano interi positivi.

L'ultima proprietà che introduciamo riguarda il prodotto di potenze con basi diverse ma stesso esponente, in formule

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad . \tag{4.9}$$

che si dimostra usando le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione.

4.1.2 Estensione a esponenti razionali

Dalle definizioni di potenza, eq. (4.1), e radice, eq. (4.2), si ottiene la seguente relazione

$$\sqrt[n]{a^n} = a \; . \tag{4.10}$$

Se immaginiamo che l'esponente n possa anche essere un numero razionale, possiamo ottenere dalla proprietà (4.6), l'espressione

$$(a^n)^{1/n} = a^{n/n} = a^1 = a \; . \tag{4.11}$$

e quindi, combinando le (4.10), (4.11), (4.1), (4.2), ottenere

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n} \; . \tag{4.12}$$

Questa espressione ci permette di dare un significato all'operazione potenza anche se l'esponente è un numero razionale (per ora, positivo). In pratica, il numeratore dell'esponente corrisponde con la usuale definizione di potenza (numero di volte per cui devo moltiplicare la base per se stessa) mentre il denominatore alla radice, in formule

$$c^{p/q} = \sqrt[q]{c^p} \; . \tag{4.13}$$

Quindi, ad esempio, $\sqrt[2]{8} = 2^{3/2}$.

4.1.3 Estensione a esponenti negativi

Possiamo ora usare la proprietà che permette di esprimere la divisione di potenze con la stessa base, $a^{n-m} = a^n/a^m$ per estendere l'operazione potenza anche a numeri negativi. Immaginiamo che $m > n$, avremo quindi

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}^{n \textit{ volte}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{m \textit{ volte}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{(m-n) \textit{ volte}}} = \frac{1}{a^{(m-n)}} \quad , \tag{4.14}$$

cioè

$$a^{-(m-n)} = \frac{1}{a^{(m-n)}} \quad . \tag{4.15}$$

Siccome la (4.15) deve valere per ogni coppia di n ed m interi positivi, si ha che $n - m$ è un qualunque interno (positivo, negativo o nullo), quindi, in generale, possiamo dire

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p} \quad . \tag{4.16}$$

È interessante notare come nel caso in cui m ed n siano uguali, la (4.14) diventa

$$a^0 = a^{(m-n)} = \frac{a^m}{a^n} = 1 \quad , \tag{4.17}$$

cioè ogni base elevata a zero, dà 1.

Combinando quanto ricavato in questa sezione con l'espressione per la potenza di numeri razionali, possiamo effettuare qualunque operazione in cui l'esponente è un numero razionale sia positivo che negativo, difatti, se l'esponente fosse $-p/q$ potremmo scrivere

$$c^{-p/q} = \frac{1}{c^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{c^p}} \; . \tag{4.18}$$

Quindi, ad esempio, $2^{-3/2} = 1/\sqrt[2]{8}$.

4.1.4 Estensione a esponenti reali

Eè possibile estendere l'operazione potenza anche a esponenti reali. Questo passaggio, a differenza dei precedenti, non può essere spiegato con argomenti semplici ma richiede un contesto più rigoroso, contesto che sarà oggetto del corso di Analisi I. A titolo indicativo, in questa sezione daremo un'idea del processo, idea che, come anticipato, non sarà rigorosa né precisa ma che, riteniamo, possa essere utile in questa fase.

In primo luogo dobbiamo affermare che un numero irrazionale (ad esempio, $\sqrt{2}$), può essere approssimato per difetto (o per eccesso) da numeri razionali. Tali approssimazioni possono essere via via più accurate, ad esempio, se usiamo una rappresentazione decimale, possiamo dire che $\sqrt{2} \simeq 1.4142$ o che $\sqrt{2} \simeq 1.4142135623$. Ogni espressione approssimata di un numero reale è, di fatto, una sua rappresentazione razionale, ad esempio

$$\sqrt{2} \simeq 1.4142 = \frac{14142}{10000} \quad , \quad \sqrt{2} \simeq 1.414253623 = \frac{1414235623}{1000000000} \; . \tag{4.19}$$

Possiamo quindi immaginare che, la potenza a^r con r irrazionale si possa ottenere usando, invece di r, le sue approssimazioni razionali via via più precise.

> **Nota:** Abbiamo visto che le radici di numeri negativi sono definite, in questo contesto, solo se la radice è dispari. Abbiamo poi visto che, estendendo la potenza a esponenti razionali, il denominatore dell'esponente indica la radice. Quindi, per esponenti razionali, se il denominatore è pari, la potenza ha senso solo se la base è positiva. L'estensione ai reali

crea però un problema, difatti, per un certo irrazionale, possiamo avere approssimazioni razionali sia con denominatore positivo che negativo. Questa ambiguità porta a restringere l'operazione potenza solo a basi positive.

4.2 Le proprietà del logaritmo

Nella equazione (4.3) abbiamo introdotto l'operazione logaritmo di cui, per comodità, ripetiamo la definizione

$$\log_a b = c \;\Leftrightarrow\; a^c = b \,. \tag{4.20}$$

Chiameremo a base del logaritmo e b argomento. Per quanto visto nella sezione precedente, se vogliamo operare nell'ambito dei numeri reali, abbiamo alcuni vincoli. In particolare, sia la base a che l'‘argomento b devono essere positivi. Inoltre, escludiamo anche il caso $a = 1$ in quanto porterebbe a risultati non interessanti in quanto $1^c = 1$ per ogni c e, quindi, o $b = 1$, e allora c è indeterminato (può assumere qualunque valore) o $b \neq 1$, e allora non esiste alcun c che soddisfa la (4.20). È utile per alcuni sviluppi, riscrivere la (4.20) come

$$a^{\log_a b} = b \,. \tag{4.21}$$

Usando le proprieà delle potenze, è possibile derivare alcune proprietà dei logaritmi. Ad esempio, consideriamo i due reali b e c maggiori di zero, per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere

$$b = a^{\log_a b} \;,\; c = a^{\log_a c} \tag{4.22}$$

a calcolarne il prodotto come

$$b \cdot c = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c} \tag{4.23}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà del prodotto di potenze. Per la definizione di logaritmo abbiamo che

$$b \cdot c = a^{\log_a (b \cdot c)} \tag{4.24}$$

e quindi, combinando la (4.23) e la (4.24), otteniamo

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \,, \tag{4.25}$$

cioè il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori. La (4.25) permette di ottenere anche un'altra utile relazione. Difatti, se l'argomento del logaritmo è una potenza, possiamo scrivere

$$\log_a b^n = \log_a \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots)}_{n\ volte}, = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \log_a b + \ldots}_{n\ volte} = n \log_a b\ . \tag{4.26}$$

> **Nota:** La dimostrazione fornita vale, strettamente, solo se n è intero. In realtà la proprietà $\log_a b^n = n \log_a b$ vale anche per n reale. Una dimostrazione più generale può essere ricavata usando la proprietà delle potenze $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Combinando opportunamente la (4.26) e la (4.25), possiamo ottenere una serie di altre relazioni che sono molto utili nei calcoli. Ad esempio, dalla (4.26), ponendo $n = -1$, otteniamo

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b^{-1} = -\log_a b\ . \tag{4.27}$$

In maniera simile, ponendo $d = 1/c$ nella (4.25), otteniamo

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a \left(\frac{b}{d}\right) = \log_a \left(b \cdot d^{-1}\right) = \log_a b + \log_a d^{-1}\ , \tag{4.28}$$

che, usando la (4.27), dà

$$\log_a \left(\frac{b}{d}\right) = \log_a b - \log_a d\ . \tag{4.29}$$

Tale proprietà è spesso enunciata come *il logaritmo del rapporto è uguale alla differenza tra il logaritmo del numeratore e il logaritmo del denominatore.*

Vediamo ora un'ultima regola spesso utilizzata nei calcoli, il cambio di base. Supponiamo di avere un numero c reale e positivo e sia d il suo logaritmo in base a, cioè

$$d = \log_a c\ . \tag{4.30}$$

Per la definizione di logaritmo, abbiamo

$$c = a^d\ . \tag{4.31}$$

Ambo i membri della (4.31) sono reali e positivi, quindi possiamo calcolare il logaritmo in base b di entrambe,

$$\log_b c = \log_b a^d\ , \tag{4.32}$$

che, usando la (4.27) e la (4.30), diventa

$$\log_b c = d \log_b a = (\log_a c)(\log_b a) \; . \tag{4.33}$$

Riarrangiando i termini, otteniamo

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \; , \tag{4.34}$$

che, dato il logaritmo di c in base b, permette di calcolare il logaritmo di c in base a. Tale formula è nota come regola per il *cambio di base*.

4.3 La funzione esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le proprietà delle potenze e del logaritmi. In questa sezione ci occupiamo della funzione esponenziale, ovvero

$$y = a^x \; , \tag{4.35}$$

dove, a è un numero positivo. L'operazione "potenza di base reale positiva" ha senso per ogni valore di x e quindi, la funzione $y = a^x$, associa ad ogni numero reale x, un numero reale y.

Per avere un'idea del grafico di questa funzione nel piano Oxy, possiamo procedere come fatto nella sezione (2.2) per le funzioni seno e coseno. In particolare possiamo scegliere alcuni valori di x per cui è semplice calcolare il valore di $y = a^x$ e metterli su grafico. Come esempio, consideriamo $y = 2^x$. La tabella 4.2 riporta alcuni valori della funzione. Tali valori corrispondono ai punti rappresentati in blu nella figura 4.1. Ripetendo il procedimento idealmente per tutti i valori di x, è possibile ottenere la curva rossa. Nel corso di analisi acquisirete strumenti per poter rigorosamente dedurre alcune proprieà delle funzioni. In questo corso preliminare, ci limiteremo a fare alcune considerazioni di massima senza presentare alcuna dimostrazione formale. Ad esempio, è evidente che la funzione $y = 2^x$ è una funzione crescente, cioè all'aumentare di x, aumenta anche la y. Questo è vero per ogni valore della x. Inoltre, la funzione assume valori sempre positivi. Per $x < 0$, la funzione è sempre compresa tra 0 e 1 e, in particolare, al diminuire di x (per $x \to -\infty$, nel linguaggio che acquisirete al corso di analisi), y si avvicina a zero sempre più.

> **Nota:** Nel corso di analisi definirete questo comportamento dicendo che per $x \to -\infty$ la funzione ha la retta $y = 0$ come asintoto orizzontale
>
> $$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0 \; . \tag{4.36}$$

Potenze	
potenza con esponente negativo	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
potenza con esponente razionale	$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$
prodotto di potenze con stessa base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
potenza di potenza	$(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$
prodotto di potenze con stesse esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Logaritmi	
definizione di logaritmo	$b = \log_a c \Leftrightarrow a^b = c$
logaritmo del prodotto	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
logaritmo della potenza	$\log_a(b^n) = n \log_a b$
cambio di base	$\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$
Alcune relazioni utili	
espressione di un numero come logaritmo	$b = \log_a a^b$
espressione di un numero come potenza	$b = a^{\log_a b}$
esponente nullo	$a^1 = 0 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

Table 4.1: Sunto delle principali proprietà di potenze e logaritmi. Alcune proprietà comunemente riportate sui testi delle scuole secondarie (esempio: rapporto di potenza con la stessa base) sono state deliberatamente escluse in quanto deducibili facilmente a partire dalle proprietà riportate.

x	$y = 2^x$	x	$y = (1/2)^x$
0	1	0	1
1	2	1	1/2
2	4	2	1/4
3	8	3	1/8
−1	1/2	−1	2
−2	1/4	−2	4
−3	1/8	−3	8

Table 4.2: Alcuni valori delle funzioni esponenziali $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$.

Possiamo procedere in maniera analoga per la funzione esponenziale $y = (1/2)^x$. Anche in questo caso la tabella 4.2 riporta alcuni valori mentre il grafico è riportato nella figura 4.1b. Anche in questo caso la funzione è sempre positiva. Diversamente dal caso precedente, ora la funzione è decrescente, cioè al crescere di x la y diminuisce. Sulla figura 4.1b abbiamo riportato anche la funzione $y = 2^x$ (linea tratteggiata). È interessante notare come le due funzioni siano simmetriche rispetto all'asse verticale. Questo fatto non è sorprendente, difatti, dalle proprietà delle potenza abbiamo che

$$y = 2^x = \left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}, \tag{4.37}$$

quindi, il valore assunto da $y = 2^x$ per una fissata x (ad esempio, $x = 4$, $y = 16$) è uguale al valore che $y = (1/2)^x$ assume invertendo la x.

Alcune proprietà discusse negli esempi riportati sono valide per tutti i valori assunti dalla base. Nello specifico abbiamo che la funzione esponenziale $y = a^x$:

- è sempre positiva per ogni valore della x indipendentemente dal valore della base a;
- passa per il punto $x = 0$, $y = 1$ indipendentemente dal valore della base a (qualunque numero reale positivo elevato per zero da 1);
- se $a > 1$ è una funzione crescente ad ha come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ la retta $y = 0$;
- se $0 < a < 1$ è una funzione decrescente ad ha come asintoto orizzontale per $x \to \infty$ la retta $y = 0$.

Il caso $a = 1$ non è interessante in quanto l'esponenziale $y = 1^x$ si riduce alla retta orizzontale $y = 1$.

4.4 La funzione logaritmo

Analizziamo in questa sezione l'andamento e le proprieà della funzione

$$y = \log_a x\ . \tag{4.38}$$

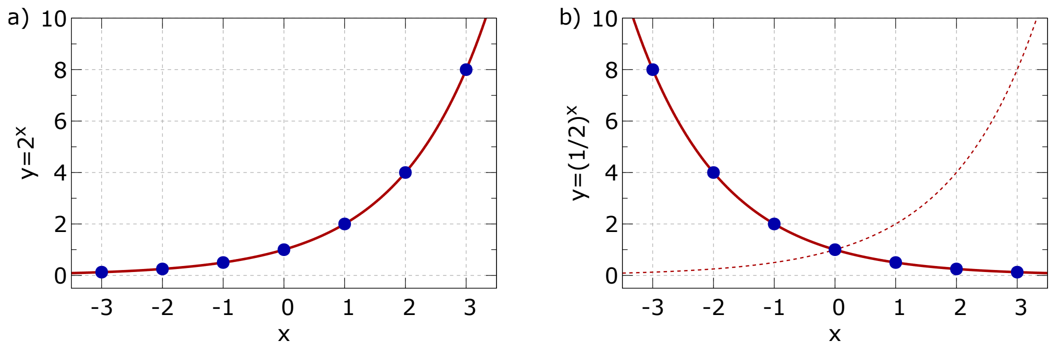

Figure 4.1: Funzione esponenziale. I due grafici riportano gli andamenti delle due funzioni $y = 2^x$ (pannello a) e $y = (1/2)^x$ (pannello b). I punti in blu corrispondono ai valori riportati nella tabella 4.2.

La base, come già visto per l'esponenziale, deve essere un numero positivo, $a > 0$, ma diverso da 1. Come fatto per l'esponenziale, analizziamo separatamente i casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Per l'intervallo $a > 1$ prendiamo come esempio il caso $a = 2$. In primo luogo, la funzione è definita solo se l'argomento è positivo, cioè per $x > 0$. Nella terminologia che verrà introdotta nel corso di Analisi I, diremo che il dominio della funzione corrisponde all'intervallo $x \in (0, \infty)$ dove il simbolo $\in$ vuol dire "appartenente" e le parentesi tonde indicano che i punti di estremo dell'intervallo non sono inclusi nell'insieme.

Possiamo poi, in analogia con quanto fatto per la funzione $y = 2^x$, riportare su grafico (punti blu in figura 4.2) alcuni valori noti (tabella 4.3). Ripetendo, idealmente, il calcolo esplicito per tutti i punti, otteniamo la curva rossa in figura 4.2. Dal grafico è evidente che la funzione è crescente. Inoltre, la funzione è positiva per $x > 1$ e negativa per $x < 1$. Avvicinandosi a $x = 0$, la funzione il valore di $y = \log_2 x$ assume valori via via più bassi.

> **Nota:** Nel corso di analisi definirete questo comportamento dicendo che per $x \to 0^+$, cioè avvicinandosi a $x = 0$ da x più grandi (da "destra", per come viene convenzionalmente rappresentato l'asse reale) la funzione ha la retta $x = 0$ come asintoto verticale
>
> $$\lim_{x \to 0^+} \log_2 x = -\infty \; . \tag{4.39}$$

In maniera analoga, possiamo tracciare il grafico della funzione $y = \log_{1/2} x$, figura 4.2b. Il dominio della funzione è, anche in questo caso, $x > 0$, tuttavia la funzione è decrescente e il limite della funzione per $x \to 0$ è $+\infty$ e non $-\infty$. Si noti come le funzioni $y = \log_2 x$ e $y = \log_{1/2} x$ siano simmetriche rispetto all'asse x. Anche in questo caso, come per la simmetria delle funzioni esponenziale $y = 2^x$

x	$y = \log_2 x$	x	$y = \log_{(1/2)} x$
1	0	0	1
2	1	1	1/2
4	2	2	1/4
8	3	3	1/8
1/2	-1	-1	2
1/4	-2	-2	4
1/8	-3	-3	8

Table 4.3: Alcuni valori delle funzioni logaritmiche $y = \log_2 x$ e $y = \log_{(1/2)} x$.

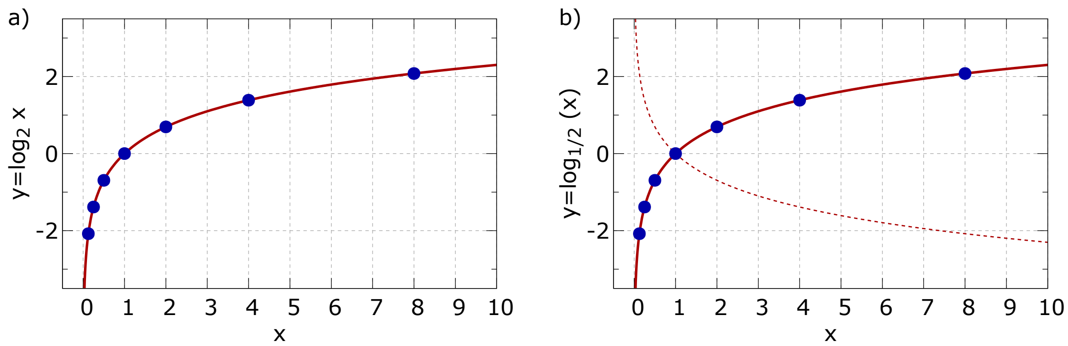

Figure 4.2: Funzione logaritmo. I due grafici riportano gli andamenti delle due funzioni $y = \log_2 x$ (pannello a) e $y = \log_{1/2} x$ (pannello b). I punti in blu corrispondono ai valori riportati nella tabella 4.3.

e $y = (1/2)^x$, la ragione di questa simmetria è nelle proprietà dei logaritmi, in particolare nella relazione

$$\log_{1/a} x = \frac{\log_a x}{\log_a (1/a)} = \frac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} = -\frac{\log_a x}{\log_a a} = -\log_a x \; . \qquad (4.40)$$

Alcune proprietà discusse negli esempi riportati sono valide per tutti i valori assunti dalla base compatibili con le condizioni $a > 0$ e $a \neq 1$. Nello specifico abbiamo che la funzione esponenziale $y = \log_a x$:

- ha come dominio sempre l'intervallo $x \in (0, \infty)$ indipendentemente dal valore della base a;
- passa per il punto $x = 1$, $y = 0$ indipendentemente dal valore della base a (qualunque numero reale positivo elevato per zero da 1 e, quindi, il logaritmo di 1 è zero in qualunque base);
- se $a > 1$ è una funzione crescente ad ha come asintoto verticale per $x \to 0^+$ la retta $x = 0$ ($\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$);
- se $0 < a < 1$ è una funzione decrescente ad ha come asintoto verticale per $x \to 0^+$ sempre la retta $x = 0$ ma, in questo caso, il limite vale $+\infty$.

4.5 Equazioni esponenziali e logaritmiche

Consideriamo l'espressione

$$f(x) = 0; , \tag{4.41}$$

dove $f(x)$ è una funzione di x. Risolvere l'equazione (4.41) vuol dire trovare tutti i valori di x per cui vale la (4.41). Indicheremo questi valori con x_i dove i è un indice che va da 1 a n con n il numero delle soluzioni. In molti casi la soluzione della (4.41) è banale, ad esempio, per $f(x) = x^2 - 4$, abbiamo

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\ , x_2 = -2; , \tag{4.42}$$

cioè l'equazione ha due soluzioni reali che valgono $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ (su alcuni testi potete trovare notazioni diverse, ad esempio $x = \pm 2$ o $x_{1,2} = \pm 2$).

In generale, la risoluzione delle equazioni, richiede tre passaggi concettuali, più un quarto di verifica che suggeriamo di effettuare sempre

1. <u>Passaggio 1, insieme di definizione.</u> Come abbiamo visto, alcune espressioni perdono di significato in alcuni intervalli. Ad esempio: $\log_2(f(x))$ richiede che $f(x) > 0$, mentre $1/g(x)$ richiede $g(x) \neq 0$. Le soluzioni di una equazione hanno senso solo se appartengono al dominio di esistenza.
2. <u>Passaggio 2, riduzione a una forma nota.</u> Esistono equazioni elementari per cui abbiamo formule risolutive esplicite, ad esempio le equazioni di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Possiamo quindi tentare di ridurre l'equazione a un'altra equazione di cui abbiamo soluzione in formula esplicita.
3. <u>Passaggio 3, risoluzione della forma nota.</u>
4. <u>Passaggio 4, verifica.</u> A valle del passaggio 3 abbiamo un insieme di soluzioni, $x_1, x_2, \ldots$. Sostituendo ognuna delle soluzioni nell'equazione originale, possiamo verificare che la soluzione è corretta. Tale passaggio, pur non garantendo che esistano altre soluzioni che non siamo riusciti a individuare, almeno permette di determinare con certezza se quelle individuate sono corrette.

Il punto 2 è, spesso, la parte più complessa in quanto si basa sovente sulla manipolazione delle espressioni e la combinazione più o meno semplice di varie proprietà delle funzioni coinvolte. Nelle prossime sezioni vedremo alcuni esempi rilevanti per le equazioni in cui la $f(x)$ contenga esponenziali o logaritmi.

4.5.1 Equazioni esponenziali

Consideriamo l'equazione

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}\ , \tag{4.43}$$

con base a reale e positiva. I valori di x che risolvono la (4.43) risolvono anche $f(x) = g(x)$, quindi abbiamo che

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \ \Rightarrow \ f(x) = g(x) \ . \tag{4.44}$$

Questa considerazione ci permette di formulare una strategia generale per affrontare il punto 2 dei passaggi indicati nella lista precedente, possiamo cioè tentare di ridurre una qualunque equazione esponenziale nella forma (4.43). Di seguito sono riportati alcuni esempi.

Esempio A

Trovare le soluzioni della seguente equazione

$$2^{x^2-5} = 3 \ . \tag{4.45}$$

Passaggio 1, insieme di definizione. La funzione esponenziale è definita per ogni valore dell'esponente. L'esponente $x^2 - 5$ è un polinomio ed è definito per ogni valore di x. L'insieme di definizione è quindi tutto l'asse reale.

Passaggio 2, riduzione a una forma nota. Proviamo a riscrivere la (4.45) come la (4.43). Nel caso specifico, è sufficiente riconoscere che, dalla definizione di logaritmo, $3 = 2^{\log_2 3}$, quindi

$$2^{x^2-5} = 2^{\log_2 3} \ , \tag{4.46}$$

e, quindi, possiamo scrivere

$$x^2 - 5 = \log_2 3 \ , \tag{4.47}$$

Passaggio 3, risoluzione della forma nota. La (4.47) è un'equazione di secondo grado che ha come soluzioni

$$x_1 = \sqrt{5 + \log_2 3} \ , \ x_2 = -\sqrt{5 + \log_2 3} \tag{4.48}$$

Passaggio 4, verifica. Sostituire le (4.48) nella (4.45). Esercizio lasciato allo studente.

Esempio B

Trovare le soluzioni della seguente equazione

$$3^{1-2x} - \frac{1}{9} 3^{x^2-1} = 0 \ . \tag{4.49}$$

Passaggio 1, insieme di definizione. Anche in questo caso, come nel precedente, le funzioni coinvolte sono definite per ogni valore di x, quindi, l'insieme di definizione è quindi tutto l'asse reale.

Passaggio 2, riduzione a una forma nota. Usando $1/9 = 3^{-2}$, possiamo riscrivere la (4.49) come

$$3^{1-2x} = 3^{-2}\, 3^{x^2-1} \quad \Rightarrow 3^{1-2x} = 3^{x^2-3} \,. \tag{4.50}$$

A questo punto, usando la (4.44), otteniamo

$$1 - 2x = x^2 - 3 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 4 = 0 \,. \tag{4.51}$$

che è una forma nota.

Passaggio 3, risoluzione della forma nota. La (4.51) è un'equazione di secondo grado che ha come soluzioni. Ricordiamo che la soluzione di un'equazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c = 0$, con discriminante $b^2 - 4ac \geq 0$ è data da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che, applicata alla (4.51), dà

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = -1 + \sqrt{5} \;\;,\;\; x_2 = -1 - \sqrt{5} \,. \tag{4.52}$$

Passaggio 4, verifica. Sostituire le (4.49) nella (4.52). Esercizio lasciato allo studente.

Esempio C

Trovare le soluzioni della seguente equazione

$$x\, e^{\left(\frac{1}{\sin^2(x)} + x^2\right)} + \left(\frac{1}{\log x}\right)^2 = 0 \,. \tag{4.53}$$

A prima vista, un'equazione del genere potrebbe far pensare a complicati metodi di soluzione (o, all'assenza di metodi di soluzione analitici). Tuttavia, ragionando sull'insieme di definizione, ci rendiamo subito conto che l'equazione ha senso solo se $x > 0$ (argomento del logaritmo). Tuttavia, per $x > 0$, il primo termine è sempre maggiore di zero. Anche il secondo termine è sempre maggiore di zero. Abbiamo quindi che la somma si due termini strettamente maggiori di zero, deve essere nulla. Il che è impossibile. La (4.53) non ammette, quindi, alcuna soluzione.

> **Nota:** Questo esempio ci permette di suggerire una sorta di "passaggio zero". Dedicate qualche minuto ad analizzare preliminarmente

l'equazione e cercate di capire se non rientra in casi che evidentemente non hanno soluzione, ad esempio: una funzione sempre negativa uguale a un valore positivo. In alcune circostanze, questo è abbastanza evidente, ad esempio

$$[f(x)]^2 = -1$$

$$e^{f(x)} = -1$$

in altri casi, come quello riportato, riconoscere l'assenza di soluzioni richiede almeno un parziale calcolo dell'insieme di definizione.

4.5.2 Equazioni logaritmiche

Consideriamo l'equazione

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \tag{4.54}$$

con base a reale e positiva. I valori di x che risolvono la (4.54) risolvono anche $f(x) = g(x)$, purchè siano rispettate le condizioni di esistenza $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$, quindi

$$\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right. . \tag{4.55}$$

Dove, con la parentesi graffa, indichiamo che va risolto il sistema di equazioni e disequazioni costituito da $f(x) = g(x)$, $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$. Risolvere il sistema vuol dire trovare separatamente le soluzioni delle equazioni e disequazioni riportate e, poi, farne l'intersezione, cioè trovare gli intervalli o i punti che sono soluzione di tutte e tre le relazioni. Analogamente a quanto visto per le equazioni esponenziali, la (4.55) ci permette di formulare una strategia generale per affrontare il punto 2 dei passaggi indicati nella sezione (4.5), possiamo cioè tentare di ridurre una qualunque equazione logaritmica nella forma (4.54). Di seguito sono riportati alcuni esempi.

4.5.3 Esempio A

Trovare le soluzione dell'equazione

$$\log x = \log(x^2 - 1) \; . \tag{4.56}$$

<u>Passaggio 1, insieme di definizione.</u> In primo luogo dobbiamo porre gli argomenti dei logaritmi maggiori di zero. Quindi accetteremo solo soluzioni che soddisfano il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{array} \right. . \tag{4.57}$$

Riportiamo le soluzioni del sistema sull'asse reale, figura (4.3). La seconda disequazione può essere risolta con le (varie) metodologie standard per le equazioni di secondo grado. Nel caso specifico, l'equazione associata $x^2 - 1 = 0$ ammette come soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$. Queste soluzioni, dividono l'asse reale in tre intervalli $x < -1$, $-1 < x < 1$ e $x > 1$. La disequazione è verificata in due di essi, $x < -1$ e $x > 1$. Per verificarlo, si può scegliere un punto di ogni intervallo e sostituirlo in $x^2 - 1 > 0$

> **Nota:** In alternativa, si può usare la regola mnemonica per cui se il segno del coefficiente della x^2 è "concorde" con il segno della disequazione di secondo grado si prendono gli intervalli esterni mentre se è "discorde", si prende l'intervallo interno. Il nostro suggerimento è di ricorrere il meno possibile a regole mnemoniche ma di fare sempre verifiche.

<u>Passaggio 2, riduzione a una forma nota.</u> I due logaritmi sono uguali se sono uguali i loro argomenti, per cui, otteniamo l'equazione

$$x = x^2 - 1 \; . \tag{4.58}$$

<u>Passaggio 3, risoluzione della forma nota.</u> La (4.58) è un'equazione di secondo grado che ha come soluzioni

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; , \tag{4.59}$$

La soluzione x_2 non si trova nell'insieme di definizione e quindi va scartata. La (4.56) ammette quindi come unica soluzione $x_1 = (1+\sqrt{5})/2$.

<u>Passaggio 4, verifica.</u> Come negli altri esempi, la verifica è lasciata allo studente. In questo caso però vogliamo sottolineare un punto cruciale. Supponiamo di aver dimenticato di prendere solo le soluzioni che fanno parte dell'insieme di definizione e di aver considerato, per sbaglio, anche $x_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Sostituendo questo valore nella (4.56) otteniamo che, al primo membro, dovremmo calcolare il logaritmo di un numero negativo, operazione impossibile.

4.5.4 Soluzioni per sostituzione

Un'altra tecnica molto comune per la risoluzione di equazioni logaritmiche ed esponenziali, è il metodo di sostituzione. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$-3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \; . \tag{4.60}$$

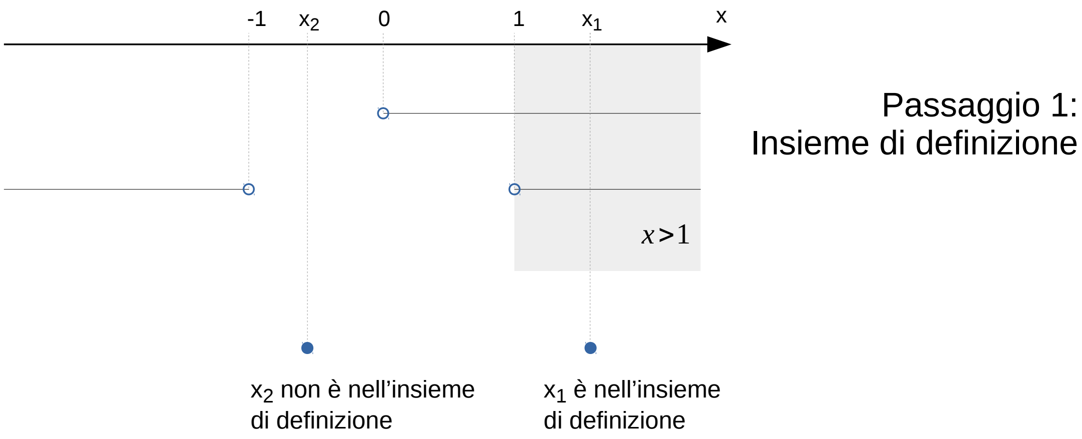

Figure 4.3: Insieme di definizione (rettangolo in grigio) e soluzione dell'equazione (4.58). La soluzione x_2 è esclusa in quanto non appartiene all'insieme di definizione.

La (4.60) può essere riscritta come

$$-(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \; . \tag{4.61}$$

che, ponendo $t = 2^x$, diventa

$$-t^2 - 5t + 6 = 0 \; , \tag{4.62}$$

le cui soluzioni sono

$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = -6 \; . \tag{4.63}$$

Riutilizziamo ora la sostituzione $t = 2^x$ e otteniamo le seguenti due equazioni

$$2^x = 1 \; , \tag{4.64}$$

$$2^x = -6 \; . \tag{4.65}$$

La prima delle due ha come soluzione $x = 0$, la seconda delle due invece non ha alcuna soluzione in quanto non esiste nessun numero reale che, dato come esponente a 2 dà -6.

La metodo per sostituzione si può applicare anche ad altre equazioni. Ad esempio

$$2 \log x - (\log x - 1)^2 - 1 = 0 \; . \tag{4.66}$$

può essere riscritta come

$$2(\log x - 1) - (\log x - 1)^2 + 1 = 0 \; . \tag{4.67}$$

A questo punto possiamo porre $t = (\log x - 1)$ e procedere come sopra. Si noti che, essendo una equazione logaritmica, dobbiamo accettare solo soluzioni che rientrino nell'insieme di definizione. Nel caso specifico $x > 0$.

4.6 Esercizi

1. Calcolare il valore delle seguenti espressioni

$$\log_3 9 \tag{4.68}$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{64}\right) \tag{4.69}$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) \tag{4.70}$$

$$\log_{10} 0.01 \tag{4.71}$$

2. Fornire una stima delle seguenti espressioni (senza usare la calcolatrice)

$$\log_2 25 \tag{4.72}$$

$$\log_3 70 \tag{4.73}$$

$$\log_{10} 234 \tag{4.74}$$

$$\log_{10} 0.0013 \tag{4.75}$$

$$1.5^3 \tag{4.76}$$

$$0.35^{-2} \tag{4.77}$$

3. Risolvere le seguenti equazioni

$$\log_2(x-1) + \log_2(x^2+3) = \log_2(x^2-1) \tag{4.78}$$

$$3^{(1-x)} = 9 \cdot 3^{x^2-1} \tag{4.79}$$

$$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4 \tag{4.80}$$

$$\log_2(x+1) = \log_4(2x+5) \tag{4.81}$$

$$\log_2 \sqrt{4x^2-3x+4} - \log_8 \sqrt{x^2+x+1} = 1 \tag{4.82}$$

$$(\log x^2)^2 - 2\log(x^3) + 2 = 0 \tag{4.83}$$

$$\frac{e^x}{e^x-1} = 2 \tag{4.84}$$

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \tag{4.85}$$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-2x^2} - \pi^{x^3-x} = 0 \tag{4.86}$$

$$e^{3x+3} + e^{2x+2} + e^{x+1} = 0 \tag{4.87}$$

$$\frac{7^{2-x}}{4} = \frac{7}{21 + (\sqrt{7})^x} \tag{4.88}$$

Suggerimenti

(4.81): usare cambiamento base

(4.82): usare cambiamento base, riscrivere le radici come $f(x)^{p/q}$ e portare l'esponente fuori dal logaritmo usando $\log_a(b^n) = n \log_a b$

(4.83): dopo qualche semplificazione, tentare una sostituzione $t = \log x$

(4.85): risolvere per sostituzione (4.87): somma di numeri positivi (4.88): dopo qualche semplificazione, sostituire $t = 7^{x/2}$