BOZZA DI ESERCIZI PRE-CORSI

RICHIAMI DI MATEMATICA

Dott. Mirco Berdini

INDICE

NOTE

Di seguito sono riportati i simboli e le espressioni delle quali, man mano, si troverà riscontro nel seguente documento.

Simbolo/Espressione	***Significato***
C.E.	Condizioni di Esistenza (per equazioni/disequazioni Frazionarie con x al denominatore)
Sol.	Soluzione/i
$\neq$	Non uguale/Diverso
$\pm$	Il numero che segue vale una volta + e una volta –
$>, \geq$	Simbolo di maggiore, maggiore e uguale
$<, \leq$	Simbolo di minore, minore e uguale
:=	Definito come
Impossibile	E’ impossibile trovare una soluzione
Indeterminata	La soluzione non si può determinare in quanto si elide la x
Non Accettabile	La soluzione non può essere accettata perché fa parte delle C.E.

Il seguente documento è una bozza di esercizi a disposizione dei futuri studenti della Facoltà di Ingegneria Tor Vergata e che svolgono i corsi di recupero.

In caso di errori presenti nel documento si prega di comunicarli ad uno dei seguenti contatti:

mircoberdini@gmail.com

mauro.chinappi@uniroma2.it

1 Equazioni di primo e secondo grado

1.1 Equazioni di primo grado

1. $2x - 3 = 5$ [4]

2. $\dfrac{3x-1}{x+2} - 2 = 0$ $[\mathrm{C.E.}: x \neq -2, \mathrm{Sol.}: 5]$

3. $2(x+1) - 3x = x - 3(x-1)$ [1]

4. $2x - [x - 1 - (2x+1) - 3] = x + 1$ [-2]

5. $\dfrac{x+1}{x} = 0$ $[\mathrm{C.E.}: x \neq 0, \mathrm{Sol.}: -1]$

6. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x} = 0$ $\left[\mathrm{C.E.}: x \neq 0, \mathrm{Sol.}: \dfrac{1}{3}\right]$

7. $\dfrac{x+1}{10} - \dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{2x-1}{5} - \dfrac{x-1}{2} + 1$ [-7]

8. $\dfrac{3+x}{x} = \dfrac{5}{x} + 1$ [Impossibile]

9. $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-1}{2} + 2 = \dfrac{19-x}{6}$ [Indeterminata]

10. $\dfrac{3x-3}{x-1} + \dfrac{2x-1}{x+1} = 5$ $[\mathrm{C.E.}: x \neq 1; -1, \mathrm{Sol.}: 1, \text{non accetabile}]$

11. $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3}{4}x = \dfrac{4-3x}{5} + \dfrac{3}{4}$ [3]

12. $\dfrac{2x-1}{2} - 5 = 2x - 9 - \dfrac{1-2x}{2}$ [2]

13. $\dfrac{2}{15} - \left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{2x-35}{10} - \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{2x+5}{4} + \dfrac{1}{6}\right)\right] = 0$ [3]

14. $\dfrac{1}{8}(x+7) - 3 = \dfrac{x+1}{2} - \left[\dfrac{1}{5}(6-x) + 1 + \dfrac{1}{3}(2+x)\right]$ [1]

15. $\dfrac{x-0{,}5}{4} - \dfrac{x-0{,}5}{3} - \dfrac{2x-1}{2} = x - \dfrac{1}{2}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

16. $\frac{x+0{,}1}{0{,}2} = 1{,}85 + 0{,}5x$ [0,3]

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2, 8, 9, 10 e 17.

Esercizio 1:

$2x - 3 = -5$

$2x = -5 + 3$

$2x = -2$

$\frac{2x}{2} = -\frac{2}{2}$

$x = -1$

Esercizio 2:

$\frac{3x-1}{x+2} - 2 = 0$

Nota: se un denominatore diventa zero l'espressione non ha significato (infatti nell'aritmetica non ha significato dividere per zero!).

La condizione da porre sarà allora $x + 2 \neq 0$, cioè C.E. (Condizioni di Esistenza): $x \neq -2$ (come soluzione posso accettare qualsiasi numero tranne -2).

$\frac{3x-1}{x+2} - 2 = 0$

Moltiplicando a destra e sinistra per il denominatore si ha:

$3x - 1 - 2x - 4 = 0$

$3x - 2x = 4 + 1$

$x = 5$

La possibile soluzione trovata rispetta le C.E.? Poiché 5 non è -2, si dice che $x = 5$ è la soluzione accettabile.

Esercizio 8:

$\frac{3+x}{x} = \frac{5}{x} + 1$

C.E.: $x \neq 0$, sono accettabili tutti i numeri tranne zero.

$\frac{3+x}{x} = \frac{5+x}{x}$

$3 + x = 5 + x$

$x - x = 5 - 3$

$0 = 2$ Falso $\rightarrow$ l'equazione è impossibile.

Esercizio 9:

$$\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} + 2 = \frac{19-x}{6}$$

$$\frac{2 \cdot (x+2) - 3 \cdot (x-1) + 12}{6} = \frac{19-x}{6}$$

$$\frac{2x + 4 - 3x + 3 + 12}{6} = \frac{19-x}{6}$$

$2x - 3x + x = -4 - 3 - 12 + 19$

$3x - 3x = -19 + 19$

$0 = 0$

In questo caso non si può determinare il valore della x in quanto si annulla. La soluzione è indeterminata.

Esercizio 10:

$$\frac{3x-3}{x-1} + \frac{2x-1}{x+1} = 5$$

Le Condizioni di Esistenza (C.E.):

$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$, sono accettabili tutti i numeri tranne +1 e -1

$$\frac{3x-3}{x-1} - \frac{2x-1}{x+1} = 5$$

$$\frac{(3x-3)(x+1) + (2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$3x^2 + 3x - 3x - 3 + 2x^2 - 2x - x + 1 = 5x^2 + 5x - 5x - 5$

$3x^2 + 2x^2 - 5x^2 - 2x - x = 3 - 1 - 5$

$-3x = -3$

$$x = \frac{-3}{-3} = 1$$

La soluzione $x = 1$ non è accettabile perché non rispetta le C.E.

Esercizio 16:

$$\frac{x+0{,}1}{0{,}2} = 1{,}85 + 0{,}5x$$

$$\frac{x+\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{185}{100} + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{\frac{10x+1}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{185}{100} + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{10x+1}{10} \cdot \frac{10}{2} = \frac{185}{100} + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{10x+1}{2} = \frac{185}{100} + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{10x+1}{2} = \frac{185}{100} + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{50(10x+1)}{100} = \frac{185 + 10 \cdot 5x}{100}$$

$$500x + 50 = 185 + 50x$$

$$500x - 50x = 185 - 50$$

$$450x = 135$$

$$\frac{450x}{450} = \frac{135}{450}$$

$$x = \frac{135}{450} = 0{,}3$$

1.2 Equazioni di secondo grado

1. $x^2 = 121$ [11,-11]

2. $x^2 + 2x + 1 = 0$ [-1]

3. $x^2 - 5x + 6 = 0$ [2;3]

4. $(x+3)^2 = 0$ [-3;-3]

5. $(x-2)^2 - 9 = 0$ [-1;5]

6. $(x+1)^3 = 0$ [-1;-1;-1]

7. $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 0$ [No soluz. Reali]

8. $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{15}{2} - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$ [-1;1]

9. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1} = 0$ $[C.E.: x \neq -1, Sol.: 1; 2]$

10. $\pi x^2 - 9x + 2 = 0$ $\left[\dfrac{9 - \sqrt{81 - 8\pi}}{2\pi}; \dfrac{9 + \sqrt{81 - 8\pi}}{2\pi}\right]$

11. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} = 0$ $[\mathrm{C.E.: x \neq -4; x \neq -3, Sol.: -1; -2}]$

12. $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$ $\left[\mathrm{C.E.: x \neq -2; x \neq 2, Sol.: 0; \tfrac{1}{2}}\right]$

13. $\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{x - x^2}{x+2} = \dfrac{2}{x+1}$ $\left[\mathrm{C.E.: x \neq -2; x \neq -1, Sol.:} \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{33}}{4}; \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{33}}{4}\right]$

14. $\dfrac{(x+1)^3}{(x+1)^2(x-1)} - \dfrac{x+2}{x+1} = 3$ $[\mathrm{C.E.: x \neq -1; x \neq -1, Sol.:} \dfrac{1 \pm \sqrt{73}}{6}]$

15. $(2x-1)(x+2) - 2[3x^2 - x(x-3)] + 7 = 0$ $\left[1; -\dfrac{5}{2}\right]$

16. $\frac{2}{3}=\frac{x-1}{2}\frac{x+1}{3}+\frac{1}{3}[2-(x-1)]$ $[1;1]$

17. $(2-5x)(2+5x)=5(1+2x)-(2+5x)^2-10x$ $\left[-\frac{3}{20}\right]$

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2, 4, 6, 7 e 11.

Esercizio 1:

$x^2=121$

$x=\pm\sqrt{121}=\pm 11$

Esercizio 2:

$x^2+2x+1=0$

Ricordiamo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado del tipo: $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nel nostro caso a=+1, b=+2, c=+1. Sostituendo si ottiene:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-\frac{2\pm 0}{2},\quad x=-1; x=-1$$

Esercizio 4:

$(x+3)^2=0$

Ricordiamo la formula del quadrato di un binomio: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$(x+3)^2=x^2+9+6x=x^2+6x+9=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=-\frac{6\pm 0}{2},\quad x=-3; x=-3$$

Esercizio 6:

$(x+1)^3=0$

Ricordiamo la formula del cubo di un binomio $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=0$

Abbiamo a che fare con un’equazione di terzo grado che può essere risolta con il metodo di Ruffini:

Si osserva facilmente per sostituzione che il valore che annulla il polinomio è per x=-1

$(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$

	1	3	3	1
-1		-1	-2	-1
	1	2	1	0

Quindi il resto è zero e il polinomio di terzo grado iniziale si può scomporre come:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \;\rightarrow\; (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) = 0$

Come soluzioni si ottengono:

$(x + 1) = 0 \;\rightarrow x = -1$

$$(x^2 + 2x + 1) = 0 \;\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2}, \quad x = -2; x = -2$$

La soluzione finale sarà: $x = -1, x = -2, x = -2$**.**

Esercizio 7:

$(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 0$

Con la formula del cubo di un binomio$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, otteniamo:

$(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 + 6x + 2 = 2(3x^2 + 3x + 1) = 0$

Risolviamo ora l'equazione di secondo grado:

$$(3x^2 + 3x + 1) = 0 \;\rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{6}$$

Il discriminante della radice è negativo, ragion per cui l'equazione non ammettono soluzioni reali.

Esercizio 11:

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} = 0$$

Le C.E. impongono che il denominatore debba essere diverso da zero. Risolviamo il denominatore:

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \;\rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}, \quad x \neq -3;\; x \neq -4$$

Risolviamo ora il numeratore:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \ \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}, \quad x = -1;\ x = -2$$

Dato che x=-1 e x=-2 sono valori diversi dalle C.E. le due soluzioni sono accettabili.

2 Disequazioni di primo e secondo grado

2.1 Disequazioni di primo grado

1. $x - 1 > 2$ $[x > 3]$

2. $4(1-x) \leq 3(2-2x)$ $[x \leq 1]$

3. $2x + 3 > \dfrac{4x-1}{2}$ $[\forall x \in R]$

4. $3 - x(x+1) - [x - 2(1-3x)] < (3-x)(3+x)$ $[x > -\frac{1}{2}]$

5. $\dfrac{3x+1}{x-2} > \dfrac{1}{2}$ $[x < -\frac{4}{5} \vee x > 2]$

6. $\dfrac{x+1}{2x-1} - 3 < \dfrac{2-x}{1-2x}$ $\left[x < \dfrac{1}{2} \vee x > 1\right]$

7. $x + 3(x-5) < 7 - [x + 4 - 2(3x+2)]$ $[x > -22]$

8. $\dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{x+1} > \dfrac{2}{x+1}$ $[-3 < x < -1 \vee 0 < x < 4]$

9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x} < \dfrac{6}{x-1} - \dfrac{4}{x}$ $[-2 < x < 0 \vee 1 < x < 5]$

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2, 4, 5.

Esercizio 1:
$x - 1 > 2$

$x > 2 + 1 \rightarrow x > 3$

Esercizio 2:

$4(1 - \mathrm{x}) \leq 3(2 - 2\mathrm{x})$

$4 - 4\mathrm{x} \leq 6 - 6\mathrm{x}$

$-4\mathrm{x} + 6\mathrm{x} \leq 6 - 4$

$2\mathrm{x} \leq 2 \quad \rightarrow \mathrm{x} \leq 1$

Esercizio 4:

$3 - x(x + 1) - [x - 2(1 - 3x)] < (3 - x)(3 + x)$

$3 - x^2 - x - [x - 2 + 6x] < 9 - x^2$

$3 - x - [x - 2 + 6x] < 9$

$3 - x - x + 2 - 6x < 9$

$-x - x - 6x < 9 - 3 - 2$

$-8x < 4$

$8x > -4$

$x > -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$

Esercizio 5:

$$\frac{3x+1}{x-2} > \frac{1}{2}$$

Abbiamo ora a che fare con una disequazione frazionaria con x al denominatore. Risolviamola per poi studiare separatamente numeratore e denominatore:

$$\frac{3x + 1}{x - 2} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\frac{6x + 2 - (x - 2)}{2(x - 2)} > 0$$

$$\frac{6x + 2 - x + 2}{2(x - 2)} > 0$$

$$\frac{5x + 4}{2(x - 2)} > 0$$

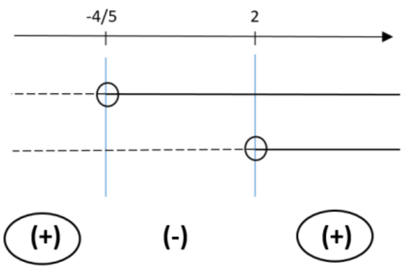
Studiamo il numeratore> 0:

$$5x + 4 > 0 \ \rightarrow x > -\frac{4}{5}$$

Ora il denominatore> 0:

$$2(x - 2) > 0 \ \rightarrow x > 2$$

Ora dobbiamo unire le due soluzioni**:**



Il testo della disequazione ci richiede una soluzione > 0. Il risultato (evidenziato) sarà: $[x < -\frac{4}{5} \vee x > 2]$

2.2 Disequazioni di secondo grado

1. $(3x+2)(-x+5)\geq 0$ $\left[-\frac{2}{3}\leq x\leq 5\right]$

2. $-3x^2+7x-2\geq 0$ $\left[\frac{1}{3}\leq x\leq 2\right]$

3. $2x^2-3x+1>0$ $\left[x<\frac{1}{2}\vee x>1\right]$

4. $(5x-1)(x-2)+3(x-1)^2>(2-x)-\left[6x+2(2x-3)-2(1-2x)^2\right]$ $\left[x>\frac{5}{2}\right]$

5. $\left(2x+\frac{1}{2}\right)\left(2x-\frac{3}{2}\right)<0$ $\left[-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\right]$

6. $-\frac{1}{4}x^2+4<0$ $[x<-4\vee x>4]$

7. $3x^2+2x-8>0$ $\left[x<-2\vee x>\frac{4}{3}\right]$

8. $-3x^2-10x+8>0$ $\left[-4<x<\frac{2}{3}\right]$

9. $\frac{4x^2+5x}{3x^2}\geq 0$ $\left[x\leq-\frac{5}{4}\vee x>0\right]$

10. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-(1+x)^2-\frac{1+2x}{3}<-\left(1-\frac{2x+1}{6}\right)$ $\left[x>-\frac{1}{16}\right]$

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1 e 6.

Esercizio 1:

$(3x+2)(-x+5) \geq 0$

$(-3x^2+15x-2x+10) \geq 0$

$-3x^2+13x+10 \geq 0$

Cambiamo i segni ricordando di invertire anche il segno della disequazione:

$3x^2-13x-10 \leq 0$

$3x^2-13x-10 = 0$

Risolviamo l'equazione di secondo grado, ad esempio con il metodo di Ruffini:

Dobbiamo trovare tra i divisori di -10 quelli che annullano il polinomio. I divisori di -10 sono (1;-1;2;-2;5;-5;10;-10). Si ottiene, per sostituzione, che il valore che annulla il polinomio è per x=-1

$3(5)^2-13(5)-10 = 75-65-10 = 0$

	3	-13	-10
5	↓	15	10
	3	2	0

Quindi il resto è zero e il polinomio di secondo grado iniziale si può scomporre come:

$3x^2-13x-10 = (x-5)\cdot(3x+2) = 0$

Come soluzioni dell'equazione si ottengono:

$(x-5) = 0 \ \rightarrow x = 5$

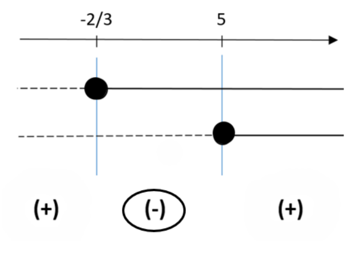
$(3x+2) = 0 \ \rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Ora dobbiamo risolvere la disequazione. Imponiamo i due risultati con ≥ 0:

$x \geq 5$

$x \geq -\frac{2}{3}$

Mettiamo a grafico i risultati e dato che ci viene richiesto un risultato per ≤ 0, abbiamo:



Il risultato sarà: $\left[-\frac{2}{3} \leq x \leq 5\right]$

Esercizio 6:

$$-\frac{1}{4}x^2 + 4 < 0$$

$$\frac{-x^2 + 16}{4} < 0$$

$$-x^2 + 16 < 0$$

$$x^2 - 16 > 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

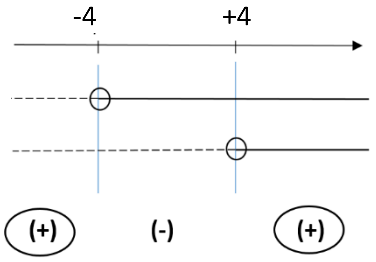
$$x^2 = 16 \ \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Ora dobbiamo risolvere la disequazione. Imponiamo i due risultati con ≥ 0:

$$x > -4$$

$$x > 4$$

Mettiamo a grafico i risultati e dato che ci viene richiesto un risultato per > 0, abbiamo:



Il risultato sarà: $\left[x < -4 \vee x > 4\right]$

3 Sistemi di disequazioni e equazioni

3.1 Sistemi di equazioni

1. $\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$ $[(5,\ 8)]$

2. $\begin{cases} (x+y)^2 - 2 = x(x+2y) + y(y+1) + x \\ 4x^2 - 8x + 4 = 3(y+2)^2 - 3 \end{cases}$ $\left[(1;\ -3),\ (7;\ -9)\right]$

3. $\begin{cases} (x-y)^2 - 2 = y(y-2x) - x(1-x) + y \\ 4y^2 - 8y + 4 = 3(2-x)^2 - 3 \end{cases}$ $\left[(9;\ 7),\ (3;\ 1)\right]$

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1 e 2.

Esercizio 1:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ 4x + 2y = 36 \end{cases}$$

La scelta dell'incognita da isolare è indifferente ma, per comodità di calcolo, si conviene di privilegiare l'equazione più semplice e il termine col coefficiente più semplice. Dalla prima equazione ottengo:

$x + y = 13\ y = 13 - x$

Per sostituzione nella seconda si ha:

$4x + 2y = 36$

$4x + 2(13 - x) = 36$

$4x\ 26 - 2x = 36$

$2x = 36 - 26\ x = 10\ 2 = 5$

Quindi:

$y = 13 - x = 13 - 5 = 8$

Esercizio 2:

$$\begin{cases}(x+y)^2-2 \ = \ x(x+2y)+y(y+1)+x \\ \qquad 4x^2-8x+4=3(y+2)^2-3\end{cases}$$

Anche in questo caso risolviamo il sistema per sostituzione, svolgendo le 2 equazioni insieme:

$$\begin{cases}x^2+y^2+2xy-2 \ = \ x^2+2xy+y^2+y+x \\ \qquad 4x^2-8x+4=3y^2+12+12y-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\qquad x+y= \ -2 \\ 4x^2-8x+4=3y^2+12y+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\qquad x=-y \ -2 \\ 4+(-y \ -2)^2-8(-y \ -2)+4=3y^2+12+12y-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\qquad x=-y \ -2 \\ 4y^2+16+16y+8y+16+4=3y^2+12y+9\end{cases}$$

$$\begin{cases}\quad x=-y \ -2 \\ y^2+12y+27=0\end{cases}$$

Risolviamo l’equazione di secondo grado con la formula risolutiva:

$$\begin{cases}\qquad x=-y \ -2 \\ y^2+12y+27=0 \rightarrow \ y=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 27}}{2\cdot 1}=\dfrac{-12\pm\sqrt{144-108}}{2}=\dfrac{-12\pm 6}{2}, \quad y_1=-3; \ y_2=-9\end{cases}$$

Sostituiamo i valori appena trovati nella prima equazione per trovare la coppia di soluzioni (x_1,y_1) e (x_2,y_2):

$$\begin{cases}x_1=-y_1-2=3-2=1; \quad x_2=-y_2-2=9-2=7 \\ \qquad y_1=-3; \quad y_2=-9\end{cases}$$

3.2 Sistemi di disequazioni

1. $\begin{cases} 12x^2 - 11x - 5 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 < 0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \vee \frac{5}{4} \leq x < 3\right]$

2. $\begin{cases} 1 - 25x^2 \geq 0 \\ 3x^2 - 7x - 6 < 0 \\ x^2 + 7x > 0 \end{cases}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{5}\right]$

3. $\begin{cases} 1 - 36x^2 \geq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 < 0 \\ x^2 + 9x > 0 \end{cases}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{6}\right]$

4. $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \\ 2x - 10 < 0 \end{cases}$ $\left[1 < x < 3 \vee 4 < x < 5\right]$

Soluzioni

Viene qui riportato lo svolgimento di un esercizio rappresentativo, in particolare il numero 1.

Esercizio 1:

$$\begin{cases} 12x^2 - 11x - 5 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x^2 - 11x - 5 = 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-5)}}{2 \cdot 12} \\ x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 240}}{24} \\ x_{3,4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{11 \pm 19}{24} \\ x_{3,4} = \dfrac{5 \pm 7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}, \qquad x_2 = -\dfrac{8}{24} = -\dfrac{1}{3} \\ x_3 = \dfrac{12}{4} = 3, \qquad x_4 = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

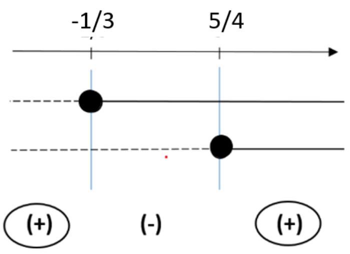
Ora dobbiamo risolvere la disequazione. Imponiamo i risultati con ≥ 0 per la prima e > 0 per la seconda:

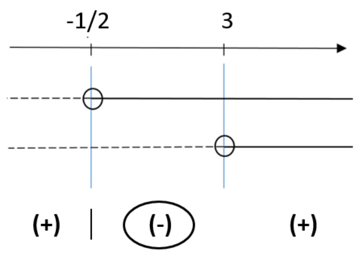
$$x_1 \geq \frac{5}{4}$$

$$x_2 \geq -\frac{1}{3}$$

$$x_3 > 3$$

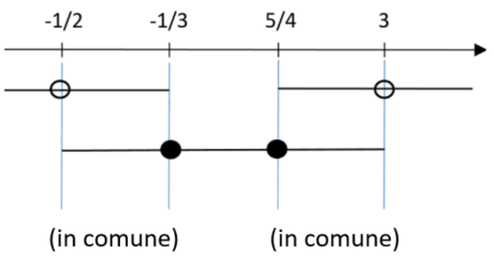
$$x_4 > -\frac{1}{2}$$





I risultati delle due equazioni sono: $\left[x \leq -\frac{1}{3}\, e\; x \geq \frac{5}{4}\right]$ e $[-\frac{1}{2} < x < 3]$

Dato che stiamo risolvendo un sistema, dobbiamo trovare l'unica soluzione che è compatibile con entrambi i risultati:



Considerando i valori in comune, si ottiene il risultato finale:

$$\left[-\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{3} \vee \frac{5}{4} \leq x < 3\right]$$

4 Goniometria

1. $\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$

2. $\cos x = -\frac{1}{2}$ $[\, x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \,]$

3. $\text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right]$

4. $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

5. $\text{sen}x = -1$ $\left[x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

6. $\text{sen}x = -\sqrt{2}$ $[\text{nessuna soluzione}]$

7. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]$

8. $\cos x = \frac{1}{2}$ $\left[x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$

9. $\cos x = 1$ $[x = 2k\pi]$

10. $\cos x > -0{,}5$ $[-\frac{\pi}{3}\ 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

11. $2\cos^2 x - \cos x < 0$ $[\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$

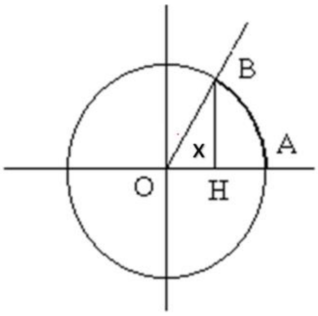
12. $\text{sen } x + \cos 2x < 1$ $[\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

13. $\sqrt{3}\,\text{sen } x + \cos x > 1$ $[2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$

14. $\frac{2\cos x - 3}{senx} \geq 0$ $[2k\pi + \frac{2}{3}\pi < x < \pi + 2k\pi]$

Soluzioni

Vengono qui riportati, oltre ad alcuni richiami teorici, gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2 e 10.



sen(x):= ordinata del punto B secondo estremo dell'arco x (il primo estremo è in A) = $\overline{BH}$.

cos(x):= ascissa del punto B secondo estremo dell'arco x = $\overline{OH}$.

tg(x), (o tanx) :=rapporto, se esiste, tra il seno e il coseno dell'angolo x (cioè quando cosα $\neq$ 0)

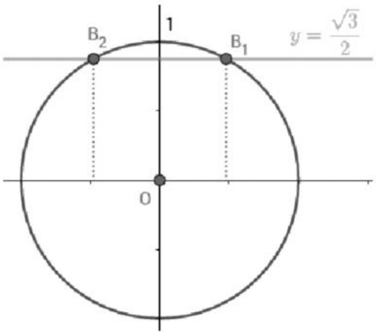
Valori delle funzioni goniometriche per angoli particolari:

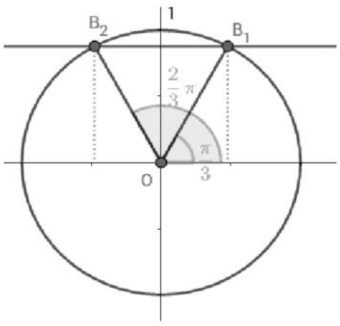
x	senα	cosα	tgα
15° = π/12	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18° = π/10	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
30° = π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = π/2	1	0	non esiste
180° = π	0	-1	0
270° = 3/2π	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2π	0	1	0

Esercizio 1:

$$\text{sen}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Disegniamo la circonferenza goniometrica nel piano cartesiano, intercettiamo la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sul grafico e applichiamo la definizione di seno di un angolo:





Le intersezioni con la retta y sono date dai punti B_1 e B_2.

Gli angoli che hanno seno uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono quindi:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

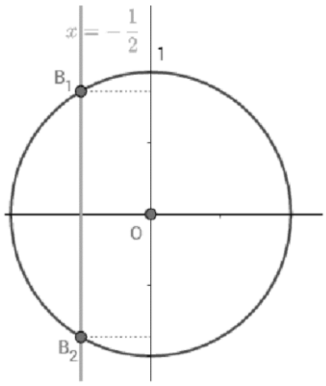
Poiché il seno è una funzione periodica di periodo 2π, alle soluzioni dobbiamo aggiungere quelle ottenute sommando i multipli di 2π, ovvero 2πk:

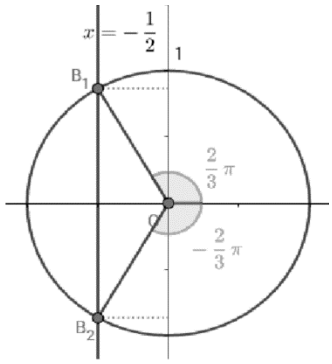
$$\left[x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right]$$

Esercizio 2:

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Disegniamo la retta di equazione $x = -\frac{1}{2}$. Le sue intersezioni con la circonferenza goniometrica sono B_1 e B_2.





Gli angoli che hanno come coseno uguale a $-\frac{1}{2}$ sono:

$x = \frac{2}{3}\pi$ o $x = -\frac{2}{3}\pi$

Poiché il coseno è una funzione periodica di periodo 2π, alle soluzioni dobbiamo aggiungere quelle ottenute sommando i multipli di 2π, ovvero 2πk:

$$[x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ o - \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ ]$$

Esercizio 10:

$\cos x > -0{,}5$

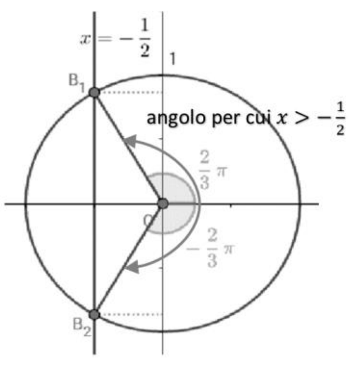
In questo caso troviamo prima l'equazione associata:

$$\cos x = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$$

La soluzione è già stata trovata nell'esempio precedente, vale a dire:

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Ora dobbiamo trovare la soluzione alla disequazione. Il grafico che segue indica i valori che soddisfano la disequazione:



Dunque il risultato sarà:

$$[-\frac{\pi}{3}\ 2k\pi < \ x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$$

5 Logaritmi ed Esponenziali

5.1 Logaritmi

1. $\log_4 x = 3$ $[64]$

2. $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$ $[\frac{1}{9}]$

3. $\log_2 x = -3$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

4. $\log_{10} x = 0$ $[1]$

5. $\log_4 x = \frac{3}{2}$ $[8]$

6. $\log_{10} x = -1$ $[\frac{1}{10}]$

7. $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ $[4]$

8. $\log_x 27 = 3$ $[3]$

9. $\log_x 32 = 5$ $[2]$

10. $\log_x \frac{1}{25} = -2$ $[5]$

11. $\log_x \frac{8}{27} = 3$ $[\frac{2}{3}]$

12. $\log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 9$ $[\log_2 12]$

13. $\log_5 7 - \log_5 21 + 3\log_5 6$ $[\log_5 72]$

14. $3\log_2 4 - \log_2 8$ $[3]$

15. $\log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{2}$ $[2]$

16. $\log(2x+3) - 2\log x = 0$ $[3]$

17. $\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$ $[\frac{10}{3}]$

18. $2\log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$ $[6]$

19. $(\log x - 2) \cdot \log x = 3$ $[\frac{1}{10}; 1000]$

20. $(4 - \log_2 x) \cdot \log_2 x = 3$ $[2; 8]$

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2, 3, 8, 10, 12, 16 e 17.

Esercizio 1:

$\log_4 x = 3$

$4^{\log_4 x} = 4^3$

$x = 4^3 = 64$

Esercizio 2:

$\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

$\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{3}^2$

$x = \frac{1}{3}^2 = \frac{1}{9}$

Esercizio 3:

$\log_2 x = -3$

$2^{\log_2 x} = 2^{-3}$

$x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Esercizio 8:

$\log_x 27 = 3$

$x2^{\log_x 27} = x^3$

$27 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3,$ scegliamo la sola soluzione positiva.

Esercizio 10:

$\log_x \frac{1}{25} = -2$

$x^{\log_x \frac{1}{25}} = x^{-2}$

$\frac{1}{25} = x^{-2}$

$\frac{1}{25} = \frac{1}{x^2} \rightarrow x = \sqrt{25} = 5$, scegliamo la sola soluzione positiva.

Esercizio 12:

$\log_2 4 + \frac{1}{2}\log_2 9$

$\log_2 4 + \log_2 (9)^{\frac{1}{2}}$

$\log_2 4 + \log_2 \sqrt{9}$

$\log_2 4 + \log_2 3$

$\log_2 (4 \cdot 3) = \log_2 12$

Esercizio 16:

$\log(2x+3) - 2\log x = 0$

$\log(2x+3) - \log x^2 = 0$

$\log(2x+3) = \log x^2$

$2x + 3 = x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \ \rightarrow \ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \pm 3$,Scegliamo la sola soluzione positiva, $x = 3$.

Esercizio 17:

$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$

$\log[\frac{x-2}{x-3}) = \log 4$

$\frac{x-2}{x-3} = 4$

$\frac{x-2}{x-3} - 4 = 0$

$\frac{x - 2 - 4x + 12}{x-3} = 0$

C.E.: $x \neq 3$

$x - 2 - 4x + 12 = 0$

$-3x = -10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$

5.2 Esponenziali

1. $3^x = \frac{1}{27}$ [−3]

2. $2^x = 16\sqrt{2}$ [$\frac{9}{2}$]

3. $5 \cdot 2^x - 18 = 2^{x-1}$ [2]

4. $5^3 + 5^{1+x} = 64 \cdot 2^{x-2}$ [−4]

5. $7^{x+2} = 49 \cdot 7^{2x-3}$ [3]

6. $9^x + 3^x = 90$ [2]

Soluzioni

Vengono qui riportati gli svolgimenti di alcuni esercizi rappresentativi, in particolare i numeri 1, 2 e 3.

Esercizio 1:

$$3^x = \frac{1}{27}$$

$$3^x = 27^{-1}$$

$$3^x = (3^3)^{-1}$$

$$3^x = 3^{-3}$$

$$x = -3$$

Esercizio 2:

$$2^x = 16\sqrt{2}$$

$$2^x = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{4+\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{\frac{9}{2}}$$

$$x = \frac{9}{2}$$

Esercizio 3:

$$5 \cdot 2^x - 18 = 2^{x-1}$$

$$5 \cdot 2^x - 18 = 2^x \cdot 2^{-1}$$

$$5 \cdot 2^x - 2^x \cdot 2^{-1} = 18$$

$$2^x \cdot (5 - 2^{-1}) = 18$$

$$2^x \cdot \left(5 - \frac{1}{2}\right) = 18$$

$$2^x \cdot (\frac{10 - 1}{2}) = 18$$

$$2^x \cdot \left(\frac{9}{2}\right) = 18$$

$$2^x = 18 \cdot \frac{2}{9}$$

$$2^x = 4 = 2^2 \rightarrow \quad x = 2$$